Obsah

1 Inverzní matice a inverzní operátor

Motivace. Místo praktického použití invertování zmíníme pro pobavení čtenáře hravou metodu šifrování [11]. Uvažujme šifrování textu bez háčků a čárek podle následující tabulky:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
8	7	5	13	9	16	18	22	4	23	11	3	21

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	6	15	12	19	2	14	17	20	25	24	10	26

Kromě šifrovací tabulky mají Alice (odesílatelka zprávy) i Bob (příjemce zprávy) k dispozici stejnou regulární matici, např. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Zprávu bez háčků a čárek Alice nejprve převede pomocí šifrovací tabulky na čísla, rozdělí na devítice (případně doplní nulami) a zapíše do matic řádu tři. Poté všechny matice zašifruje násobením s maticí $\mathbb{A}$. Chce-li například šifrovat text BÍLÁ KOČKA, pak převedením na čísla dostane matici $\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 8 & 11 & 6 \\ 5 & 11 & 8 \end{pmatrix}$ a odešle Bobovi matici $\mathbb{AM} = \begin{pmatrix} 19 & 19 & 14 \\ 12 & 15 & 11 \\ 8 & 11 & 6 \end{pmatrix}$.

Bob už přečetl kapitolu o inverzních maticích, proto umí najít matici $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ takovou, že $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{I}$. Touto maticí vynásobí matici, kterou obdržel od Alice, tj. provede součin $\mathbb{A}^{-1}(\mathbb{AM}) = \mathbb{M}$. Podle šifrovací tabulky pak zpátky dešifruje BILAKOCKA.

Kdyby se Bob neučil pořádně lineární algebru, mohl by si myslet, že je násobení matic komutativní. To by pak klidně vynásobil matici od Alice zprava a dostal by:

$$(\mathbb{AM})\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 19 & 19 & 14 \\ 12 & 15 & 11 \\ 8 & 11 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 19 \\ 1 & 10 & 15 \\ 2 & 4 & 11 \end{pmatrix}.$$

Výsledek by podle tabulky dešifroval jako CERNYPSIK.

1.1 Inverzní matice

V této kapitole navážeme na maticový počet ze skript Lineární algebra 1, zejména pak na kapitolu Frobeniova věta.

Definice 1.1. Nechť $\mathbb{A}$ je matice s prvky z tělesa T. Pokud existuje matice $\mathbb{B}$ s prvky z T taková, že $\mathbb{AB} = \mathbb{BA} = \mathbb{I}$, kde $\mathbb{I}$ je jednotková matice, pak $\mathbb{B}$ nazveme **inverzní** maticí k $\mathbb{A}$.

Poznámka 1.2.

- Matice $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ musejí být nutně čtvercové stejného řádu jako $\mathbb{I}$ (plyne z pravidel pro násobení matic).

- Pro singulární matici inverzní neexistuje. Víme totiž, že $h(\mathbb{AB}) \leq h(\mathbb{A})$. Proto je-li $\mathbb{A}$ singulární, nemůže platit $\mathbb{AB} = \mathbb{BA} = \mathbb{I}$ pro žádnou matici $\mathbb{B}$.

Věta 1.3 (Existence inverzní matice)**.** *Nechť $\mathbb{A}$ je regulární matice řádu n s prvky z tělesa T. Pak k ní existuje právě jedna inverzní matice.*

Nyní, když víme, že pro regulární matici $\mathbb{A}$ existuje právě jedna inverzní matice, má smysl ji nějak označit. Obvyklé je značení $\mathbb{A}^{-1}$.

Z věty 1.3 a z faktu, že singulární matice nelze invertovat, plyne nová ekvivalentní definice regulární matice.

Důsledek 1.4 (Regularita a inverzní matice)**.** *Čtvercová matice $\mathbb{A}$ s prvky z tělesa T je regulární, právě když existuje $\mathbb{A}^{-1}$.*

Věta 1.5 (Vlastnosti inverzních matic)**.** *Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ jsou čtvercové matice stejného řádu s prvky z tělesa T.*

1. *Pokud $\mathbb{AB} = \mathbb{I}$, pak $\mathbb{A}$ je regulární a $\mathbb{B} = \mathbb{A}^{-1}$.*
2. *Pokud $\mathbb{BA} = \mathbb{I}$, potom $\mathbb{A}$ je regulární a $\mathbb{B} = \mathbb{A}^{-1}$.*
3. *Platí, že $\mathbb{I}^{-1} = \mathbb{I}$.*
4. *Je-li $\mathbb{A}$ regulární matice, pak $(\alpha\mathbb{A})^{-1} = \frac{1}{\alpha}\mathbb{A}^{-1}$ pro každé $\alpha \in T,\ \alpha \neq 0$.*
5. *Je-li $\mathbb{A}$ regulární matice, potom $(\mathbb{A}^{-1})^{-1} = \mathbb{A}$.*
6. *Je-li $\mathbb{A}$ regulární matice, potom $\left(\mathbb{A}^T\right)^{-1} = \left(\mathbb{A}^{-1}\right)^T$.*

7. *Je-li $\vec{b} \in T^n$, pak soustava $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ s regulární maticí $\mathbb{A}$ řádu n má právě jedno řešení, a to $\vec{x} = \mathbb{A}^{-1}\vec{b}$.*

První a druhý bod věty 1.5 umožňují snazší ověření, že čtvercová matice $\mathbb{B}$ je inverzní k $\mathbb{A}$. Stačí dostat jednotkovou matici při násobení matic jen v jednom pořadí, nikoliv z obou stran, jak se požaduje v definici 1.1.

Věta 1.6 (Inverzní matice k součinu matic)**.** *Nechť $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ jsou regulární matice řádu n s prvky z tělesa T. Pak také matice $\mathbb{A}\mathbb{B}$ je regulární a $(\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1}$.*

1.2 Úplná Gaussova eliminace

Zatím jsme definovali inverzní matici a popsali její vlastnosti. V důkazu věty 1.3 se objevil i předpis pro inverzní matici (ve tvaru matice v bázích jistého operátoru), ten se ovšem nehodí pro praktický výpočet. V této kapitole si proto posvítíme na způsob hledání inverzních matic. Než si vysvětlíme, jak a proč funguje **úplná Gaussova eliminace**, [3] musíme si nejprve uvědomit, že řádkové úpravy v matici odpovídají násobení vhodnou maticí zleva.

[3] Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855), německý matematik a fyzik

Lemma 1.7. *Nechť* $\mathbb{A} \in T^{m,n}$. *Jestliže provedeme ekvivalentní řádkovou úpravu, je výsledná matice rovna matici* $\mathbb{M}\mathbb{A}$, *kde* $\mathbb{M}$ *je čtvercová matice řádu* m, *která vznikla z jednotkové matice* $\mathbb{I}$ *stejnou řádkovou úpravou.*

Věta 1.8 (Ekvivalentní řádkové úpravy a násobení maticí)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in T^{m,n}$*. Provedeme-li s* $\mathbb{A}$ *konečný počet ekvivalentních řádkových úprav, je výsledná matice rovna matici* $\mathbb{MA}$*, kde* $\mathbb{M}$ *je čtvercová matice řádu* m*, která vznikla z jednotkové matice* $\mathbb{I}$ *stejnými ekvivalentními řádkovými úpravami provedenými ve stejném pořadí.*

Věta 1.10 (Úplná Gaussova eliminace)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in T^{n,n}$*,* $\mathbb{A}$ *je regulární matice a* $\mathbb{B} \in T^{n,m}$*. Pak* $\mathbb{A}$ *lze převést ekvivalentními řádkovými úpravami na jednotkovou matici. Pokud převedeme rozšířenou matici* $(\mathbb{A} \mid \mathbb{B})$ *ekvivalentními řádkovými úpravami do tvaru* $(\mathbb{I} \mid \mathbb{X})$*, potom* $\mathbb{X} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$*.*

Symbolicky zapsáno:

$$(\mathbb{A} \mid \mathbb{B}) \sim \left(\mathbb{I} \mid \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}\right).$$

Slovo „úplná“ naznačuje, že na rozdíl od Gaussovy eliminace, kdy jsme matici pomocí EŘÚ převedli do horního stupňovitého tvaru a zastavili se, v úplné Gaussově eliminaci z horního stupňovitého tvaru pokračujeme a vyrábíme nuly nad diagonálou, dokud nedostaneme jednotkovou matici.

Úplnou Gaussovu eliminaci budeme používat k řešení následujících úloh:

(a) Jsou dány matice $\mathbb{A}$ regulární a $\mathbb{B}$ vhodného rozměru. Najděte $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$.

(b) Je dána regulární matice $\mathbb{A}$. Určete $\mathbb{A}^{-1}$. (Klademe $\mathbb{B}$ rovno $\mathbb{I}$.)

(c) Je dána regulární matice $\mathbb{A}$ a vektor $\vec{b}$ vhodného rozměru. Najděte $\mathbb{A}^{-1}\vec{b}$, tj. řešte rovnici $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$. (Klademe $\mathbb{B}$ rovno $\vec{b}$.)

(d) Jsou dány matice $\mathbb{A}$ regulární a $\mathbb{X}$ vhodného rozměru. Spočtěte $\mathbb{X}\mathbb{A}^{-1}$.
Zde aplikujeme úplnou Gaussovu eliminaci na transponované matice:

$$\left(\mathbb{A}^T \mid \mathbb{X}^T\right) \sim \left(\mathbb{I} \mid (\mathbb{A}^T)^{-1}\mathbb{X}^T\right). \tag{1}$$

Podle šestého bodu věty 1.5 a pravidel pro transponování součinu platí:

$$(\mathbb{A}^T)^{-1}\mathbb{X}^T = (\mathbb{A}^{-1})^T\mathbb{X}^T = (\mathbb{X}\mathbb{A}^{-1})^T.$$

Tudíž transponováním matice na pravé straně rozšířené matice (1) získáme $\mathbb{X}\mathbb{A}^{-1}$.

1.3 Inverzní operátor

Již víme, že pokud V je vektorový prostor nad tělesem T a A je regulární operátor na V, pak A^{-1} je také regulární operátor, tj. invertování zobrazení zachovává linearitu. Podle definice inverzního zobrazení také hned vidíme, že platí $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, kde I značí identický operátor.

Podíváme se, jakým jiným způsobem lze zjistit, zda je nějaký operátor inverzní k předepsanému operátoru. Zejména se zaměříme na rozdíly mezi vektorovými prostory konečné a nekonečné dimenze.

Věta 1.13 (Pravý a levý inverzní operátor)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V)$.*

1. *Pokud existuje $B \in \mathcal{L}(V)$ tak, že $AB = I$, pak A je „na V“.*

2. *Pokud existuje $C \in \mathcal{L}(V)$ tak, že $CA = I$, pak A je prostý.*

3. *Pokud existují $B, C \in \mathcal{L}(V)$ splňující $AB = I = CA$, potom A je regulární operátor a platí:*
$$A^{-1} = B = C.$$

Operátor B z věty 1.13 nazveme **pravým inverzním operátorem** k A a C nazveme **levým inverzním operátorem** k A.

Poznámka 1.14. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T.

- Je-li $\dim V < +\infty$ a $A \in \mathcal{L}(V)$, potom víme, že A je regulární operátor právě tehdy, když je prostý nebo „na V“. Jakmile tedy existuje B pravý inverzní operátor k A, pak je A regulární a $A^{-1} = B$. Analogicky jakmile existuje C levý inverzní operátor k A, pak je A regulární a $A^{-1} = C$.

- Je-li $\dim V = +\infty$, pak z existence pouze levého či pouze pravého inverzního operátoru neplyne nutně existence inverzního operátoru. Například pro operátory derivování a integrování $D, S \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ platí $DS = I$, ale $SD \neq I$.

Věta 1.13 dává návod k ověření, že operátor B je inverzní k lineárnímu operátoru A. Je-li $\dim V < +\infty$, pak stačí ověřit, že $AB = I$. Je-li $\dim V = +\infty$, pak je třeba zkontrolovat, že $AB = I = BA$.

Věta 1.15 (Vlastnosti inverzních operátorů)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V)$.*

1. *Platí, že $I^{-1} = I$.*

2. *Je-li A regulární operátor, pak $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$ pro každé $\alpha \in T,\ \alpha \neq 0$.*

3. *Je-li A regulární operátor, pak $(A^{-1})^{-1} = A$.*

Věta 1.16 (Inverzní operátor ke složení operátorů)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $A, B \in \mathcal{L}(V)$ a A i B jsou regulární operátory. Pak AB je regulární operátor a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Věta 1.17 (Inverzní operátor a inverzní matice)**.** *Nechť V_n je vektorový prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$ nad tělesem T, $\mathcal{X}$ je báze V_n a $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Je-li A regulární operátor, pak platí:*

$$ {}^{\mathcal{X}}(A^{-1}) = ({}^{\mathcal{X}}A)^{-1}. $$

2 Permutace a determinanty

Motivace. Determinanty úzce souvisí s obsahy a objemy. Ukážeme si, že pomocí determinantu lze snadno spočítat obsah rovnoběžníka a objem rovnoběžnostěnu. V budoucnu se setkáte s Wronského determinantem, wronskiánem, v němž jako prvky vystupují funkce a jejich derivace. Je používán zejména v teorii diferenciálních rovnic při jejich řešení metodou variace konstant a při zjišťování lineární nezávislosti funkcí. Dále se seznámíte s Jacobiho determinantem, jakobiánem, při výpočtu vícerozměrných integrálů.

Pro motivační úlohu využijeme souvislost determinantů s řešením soustav LAR. Užitím determinantů lze například najít rovnici sféry v $\mathbb{R}^3$, která je určená čtyřmi body:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}.$$

Obecná rovnice sféry má tvar $A(x^2 + y^2 + z^2) + Bx + Cy + Dz + E = 0$. Zjišťujeme tedy, zda existují čísla $A, B, C, D, E \in \mathbb{R}$ taková, že platí:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} A(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) & + & Ba_1 & + & Ca_2 & + & Da_3 & + & E & = & 0 \\ A(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) & + & Bb_1 & + & Cb_2 & + & Db_3 & + & E & = & 0 \\ A(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) & + & Bc_1 & + & Cc_2 & + & Dc_3 & + & E & = & 0 \\ A(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2) & + & Bd_1 & + & Cd_2 & + & Dd_3 & + & E & = & 0. \end{array}$$

Čtenář jistě i bez znalosti determinantů najde rovnici sféry, která prochází body:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

K úloze se vrátíme na konci kapitoly o determinantech a ukážeme si řešení s jejich využitím.

2.1 Permutace

Abychom mohli zavést pojem determinant matice, musíme nejprve vysvětlit několik pojmů z teorie permutací. V celém textu značí n přirozené číslo.

Definice 2.1. Každou bijekci (zobrazení prosté a „na“) $\pi\colon \widehat{n} \to \widehat{n}$ nazýváme **permutací** na $\widehat{n}$. Množinu všech permutací na $\widehat{n}$ značíme S_n.

Úkol 2.2. Rozmyslete si, že množina S_n má $n!$ prvků.

Poznámka 2.3. Permutace zapisujeme tabulkou s dvěma řádky $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, případně jediným řádkem $\pi = (4\ 3\ 1\ 2)$. Obojí znamená:

$$\pi(1) = 4,\ \pi(2) = 3,\ \pi(3) = 1,\ \pi(4) = 2.$$

V případě dvouřádkového zápisu nemusejí být čísla v prvním řádku uspořádána vzestupně. Permutaci π můžeme proto také zapsat například jako $\pi = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Definice 2.5. Nechť $\pi \in S_n$. Pak **inverzí** v π nazveme každou uspořádanou dvojici (i, j) splňující: $i, j \in \widehat{n}$, $i < j$ a $\pi(i) > \pi(j)$. Počet inverzí v π značíme I_π. **Znaménkem** permutace π nazveme číslo $\operatorname{sgn} \pi := (-1)^{I_\pi}$. [4] Jde o permutaci **sudou**, pokud $\operatorname{sgn} \pi = 1$, a **lichou**, pokud $\operatorname{sgn} \pi = -1$.

Identická permutace je sudá, protože počet inverzí v ní je roven 0. Značíme ji id. Naopak nejvíce inverzí obsahuje **symetrická permutace** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$, a to $\frac{n(n-1)}{2}$.

[4] Setkáme se i se značením $\operatorname{in} \pi$ pro počet inverzí v permutaci π a $\operatorname{zn} \pi$ či dokonce $\operatorname{znak} \pi$ pro znaménko permutace.

Definice 2.8. Nechť $n \geq 2$ a $i, j \in \hat{n},\ i \neq j$. **Transpozicí** čísel i a j nazveme permutaci τ_{ij} splňující:

$$\begin{aligned} \tau_{ij}(k) &= k \quad \text{pro } i \neq k \neq j, \\ \tau_{ij}(i) &= j, \\ \tau_{ij}(j) &= i. \end{aligned}$$

Pokud zapíšeme τ_{ij} pomocí tabulky (pro $i < j$), dostaneme:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & j-1 & i & j+1 & \dots & n \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Věta 2.9 (Znaménko transpozice)**.** *Každá transpozice je lichá permutace.*

Věta 2.10 (Znaménko složené permutace)**.** *Nechť $\pi, \rho \in S_n$. Pak platí:*

$$\operatorname{sgn}(\pi \circ \rho) = \operatorname{sgn} \pi \, \operatorname{sgn} \rho.$$

Důsledek 2.11. *Nechť $\pi \in S_n$. Pak $\operatorname{sgn} \pi = \operatorname{sgn} \pi^{-1}$.*

2.2 Determinant matice

V celé kapitole uvažujeme výhradně čtvercové matice a T značí těleso.

Definice 2.12. Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. Pak **determinantem matice** $\mathbb{A}$ nazveme číslo

$$\det \mathbb{A} := \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \ \mathbb{A}_{1\pi(1)} \mathbb{A}_{2\pi(2)} \dots \mathbb{A}_{n\pi(n)}.$$

Sčítance v sumě nazýváme **členy determinantu**.

Poznámka 2.13. Suma má $n!$ sčítanců. (Víme, že právě tolik je permutací na $\widehat{n}$, tedy prvků množiny S_n.) V každém členu se objevuje z každého řádku a každého sloupce matice právě jeden prvek.

V dalším textu postupně vysvětlíme jak počítat determinanty matic vyšších řádů efektivněji než z definice.

Věta 2.16 (Determinant transponované matice)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. *Pak* $\det \mathbb{A}^T = \det \mathbb{A}$.

Poznámka 2.17. Z předchozího důkazu si zapamatujme, že vzorec

$$\det \mathbb{A} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \ \mathbb{A}_{\pi(1)1} \mathbb{A}_{\pi(2)2} \dots \mathbb{A}_{\pi(n)n}$$

můžeme také považovat za definici determinantu.

Nyní představíme třídu matic, pro které je snadné vypočítat determinant.

Definice 2.18. Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$.

- Matici $\mathbb{A}$ nazveme **horní trojúhelníkovou maticí**, [7] pokud pro každé $i, j \in \hat{n}$, kde $i > j$, platí $\mathbb{A}_{ij} = 0$. Slovy: „$\mathbb{A}$ má pod diagonálou samé nuly.“
- Matici $\mathbb{A}$ nazveme **dolní trojúhelníkovou maticí**, pokud pro každé $i, j \in \hat{n}$, kde $i < j$, platí $\mathbb{A}_{ij} = 0$. Slovy: „$\mathbb{A}$ má nad diagonálou samé nuly.“

Poznámka 2.19. Je lehké si rozmyslet, že pro čtvercovou matici $\mathbb{A}$ platí:

- Je-li $\mathbb{A}$ v horním stupňovitém tvaru, pak je i v horním trojúhelníkovém tvaru.
- Je-li $\mathbb{A}$ v horním trojúhelníkovém tvaru, nemusí nutně být v horním stupňovitém tvaru. Např. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ je v horním trojúhelníkovém, ale ne stupňovitém tvaru.

Věta 2.20 (Determinant trojúhelníkových matic)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ *a* $\mathbb{A}$ *je horní či dolní trojúhelníková. Pak* $\det \mathbb{A} = \mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{22} \dots \mathbb{A}_{nn}$.

Determinanty matic řádů vyšších než tři se naučíme pomocí následující věty počítat tak, že matice pomocí řádkových a sloupcových úprav převedeme do trojúhelníkového tvaru, přičemž budeme kontrolovat, jak se mění determinant. Poté využijeme právě dokázaného faktu, že determinant trojúhelníkové matice je součin prvků na diagonále.

Věta 2.21 (Řádkové a sloupcové úpravy determinantů)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. *Pak platí:*

1. *Vznikne-li* $\mathbb{B}$ *vynásobením některého řádku (sloupce) matice* $\mathbb{A}$ *číslem* $\alpha \in T$, *pak* $\det \mathbb{B} = \alpha \det \mathbb{A}$.

[7] V literatuře se objevuje i termín pravá a levá trojúhelníková matice místo horní a dolní trojúhelníková.

2. *Je-li některý řádek (sloupec)* $\mathbb{A}$ *nulový, je také* $\det \mathbb{A}$ *nulový.*

3. *Vznikne-li* $\mathbb{B}$ *z* $\mathbb{A}$ *prohozením dvou řádků (sloupců), potom* $\det \mathbb{B} = -\det \mathbb{A}$.

4. *Má-li* $\mathbb{A}$ *dva řádky (sloupce) stejné, je* $\det \mathbb{A}$ *nulový.*

5. *Označme* $\mathbb{A} = (\vec{a}_1 \ \dots \ \vec{a}_{i-1} \ \vec{p} \ \vec{a}_{i+1} \ \dots \ \vec{a}_n)$ a $\mathbb{B} = (\vec{a}_1 \ \dots \ \vec{a}_{i-1} \ \vec{q} \ \vec{a}_{i+1} \ \dots \ \vec{a}_n)$. *Pak* $\det \mathbb{A} + \det \mathbb{B} = \det(\vec{a}_1 \ \dots \ \vec{a}_{i-1} \ (\vec{p} + \vec{q}) \ \vec{a}_{i+1} \ \dots \ \vec{a}_n)$. *Pro řádky platí analogie.*

6. *Přičteme-li k jednomu řádku (sloupci) matice* $\mathbb{A}$ *libovolný násobek jiného řádku (sloupce), determinant se nezmění.*

Důsledek 2.22. *Nechť* $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ a $\alpha \in T$. *Potom* $\det(\alpha\mathbb{A}) = \alpha^n \det \mathbb{A}$.

Zavedeme pojem n-lineární antisymetrická forma a ukážeme, že determinant je příkladem takové formy.

Definice 2.24. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Pak zobrazení $w\colon \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n\text{-krát}} \to T$ nazveme:

- n-**lineární formou** na V, pokud pro každé $\vec{y}, \vec{z}, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \in V$ a $\alpha \in T$ a pro každé $i \in \hat{n}$ platí:
$$\begin{aligned} w(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{i-1}, \alpha\vec{y} + \vec{z}, \vec{x}_{i+1}, \ldots, \vec{x}_n) &= \alpha w(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{i-1}, \vec{y}, \vec{x}_{i+1}, \ldots, \vec{x}_n) \\ &\quad + w(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{i-1}, \vec{z}, \vec{x}_{i+1}, \ldots, \vec{x}_n), \end{aligned}$$
- **antisymetrickou formou** na V, pokud pro každé $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \in V$ a pro každé $i, j \in \hat{n}, i \neq j$, platí:
$$w(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_n) = -w(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_n).$$

Důsledek 2.25. *Vnímáme-li determinant jako funkci sloupců matice, tj. jako zobrazení* $\det\colon \underbrace{T^n \times \ldots \times T^n}_{n\text{-krát}} \to T$*, pak je determinant n-lineární antisymetrickou formou na T^n.*

2.3 Determinant součinu matic

Nyní vyslovíme sérii tvrzení, která nám pomohou dokázat další důležitou vlastnost determinantů – determinant součinu matic je roven součinu determinantů jednotlivých matic.

Lemma 2.26. *Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. Předpokládejme, že $\mathbb{M}$ vznikla z jednotkové matice $\mathbb{I}_n$ nějakou ekvivalentní řádkovou úpravou. Pak platí, že* $\det(\mathbb{M}\mathbb{A}) = \det \mathbb{M} \det \mathbb{A}$.

Věta 2.27 (Ekvivalentní řádkové úpravy a determinant matice)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in T^{n,n}$*. Předpokládejme, že* $\mathbb{M}$ *vznikla z jednotkové matice* $\mathbb{I}_n$ *konečným počtem ekvivalentních řádkových úprav. Pak* $\det(\mathbb{M}\mathbb{A}) = \det \mathbb{M} \det \mathbb{A}$*.*

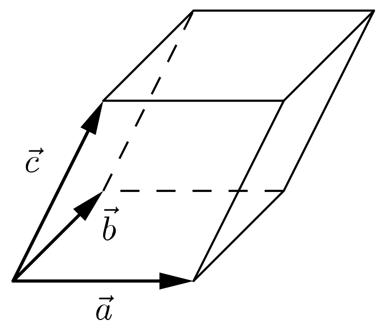
Věta 2.29 (Regulární matice a determinant)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in T^{n,n}$*. Potom* $\mathbb{A}$ *je regulární, právě když* $\det \mathbb{A} \neq 0$*.*

Věta 2.30 (Determinant součinu matic)**.** *Jsou-li* $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in T^{n,n}$*, pak platí:*

$$\det(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \det \mathbb{A} \det \mathbb{B}.$$

Věta 2.31 (Determinant inverzní matice)**.** *Nechť $\mathbb{A}$ je regulární matice, pak platí:*

$$\det(\mathbb{A}^{-1}) = \frac{1}{\det \mathbb{A}}.$$



Obrázek 2: Rovnoběžnostěn.

2.4 Rozvoj determinantu

Metoda rozvoje podle řádku či sloupce, také známá jako Laplaceova formule, [8] se bude hodit pro výpočet determinantu matice, která obsahuje hodně nulových prvků. Dále ji využijeme k hledání inverzní matice a řešení soustavy LAR pomocí Cramerova pravidla. Nejprve ale potřebujeme znát pojem algebraického doplňku.

Definice 2.34. Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$, kde $n > 1$. Označme $\mathbb{A}^{(i,j)}$ matici, která vznikne z $\mathbb{A}$ vyškrtnutím i-tého řádku a j-tého sloupce. Pak číslo

$$D_{ij} := (-1)^{i+j} \det \mathbb{A}^{(i,j)}$$

nazveme **algebraickým doplňkem** prvku $\mathbb{A}_{ij}$. [9]

Věta 2.36 (Rozvoj determinantu podle řádku či sloupce)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in T^{n,n}$, $n > 1$. *Pak platí pro každé* $i \in \hat{n}$*:*

$$\det \mathbb{A} = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{A}_{ij} D_{ij} \quad \textit{(rozvoj podle i-tého řádku)},$$

respektive pro každé $j \in \widehat{n}$:

$$\det \mathbb{A} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{A}_{ij} D_{ij} \quad \textit{(rozvoj podle } j\textit{-tého sloupce).}$$

Lemma 2.37. *Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$, $n > 1$. Nechť má $\mathbb{A}$ v i-tém řádku samé nulové prvky kromě $\mathbb{A}_{ik}$, tj. $\mathbb{A}_{i\ell} = 0$ pro každé $\ell \in \widehat{n}$, $\ell \neq k$. Pak platí $\det \mathbb{A} = \mathbb{A}_{ik} D_{ik}$.*

Definice 2.39. Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$, $n > 1$. **Adjungovanou maticí** k $\mathbb{A}$ nazveme matici $\mathbb{A}^{\mathrm{adj}}$ splňující pro každé $i, j \in \widehat{n}$:

$$[\mathbb{A}^{\mathrm{adj}}]_{ij} := D_{ji}.$$

Věta 2.40 (Inverzní a adjungovaná matice)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in T^{n,n}$, $n > 1$.

1. *Platí rovnost* $(\det \mathbb{A})\mathbb{I} = \mathbb{A}^{\mathrm{adj}}\mathbb{A}$.

2. *Pokud* $\mathbb{A}$ *je regulární, pak platí, že* $\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{A}}\mathbb{A}^{\mathrm{adj}}$.

Příklad 2.42. Spočtěte $\det(\mathbb{A}^{\mathrm{adj}})$, znáte-li $\det \mathbb{A}$.
Řešení:

- Je-li $\mathbb{A} = \mathbb{O}$, pak je jistě $\mathbb{A}^{\mathrm{adj}} = \mathbb{O}$. Proto $\det(\mathbb{A}^{\mathrm{adj}}) = 0$.
- Je-li $\mathbb{A}$ nenulová singulární matice, potom vidíme ze vztahu $(\det \mathbb{A})\mathbb{I} = \mathbb{A}^{\mathrm{adj}}\mathbb{A}$, že $\mathbb{A}^{\mathrm{adj}}$ je také singulární. Kdyby byla regulární, pak by $h(\mathbb{A}^{\mathrm{adj}}\mathbb{A}) = h(\mathbb{A})$ a zároveň $\mathbb{A}^{\mathrm{adj}}\mathbb{A} = \mathbb{O}$. Odtud by ovšem plynulo, že $\mathbb{A} = \mathbb{O}$, což je spor s předpokladem. Celkově dostáváme, že $\det(\mathbb{A}^{\mathrm{adj}}) = 0$.
- Je-li $\mathbb{A}$ regulární matice, potom získáme ze vztahu $(\det \mathbb{A})\mathbb{I} = \mathbb{A}^{\mathrm{adj}}\mathbb{A}$ rovnost $(\det \mathbb{A})^n = \det(\mathbb{A}^{\mathrm{adj}}) \det \mathbb{A}$. Odtud plyne, že $\det(\mathbb{A}^{\mathrm{adj}}) = (\det \mathbb{A})^{n-1}$.

Věta 2.44 (Cramerovo pravidlo)**.** *Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$, kde $n > 1$, a $\vec{b} \in T^n$. Pokud $\mathbb{A}$ je regulární matice, potom pro každé $j \in \hat{n}$ je j-tá složka řešení soustavy $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ rovna:*

$$x_j = \frac{\det \mathbb{B}^{(j)}}{\det \mathbb{A}},$$

kde $\mathbb{B}^{(j)}$ je matice, která vznikne nahrazením j-tého sloupce matice $\mathbb{A}$ vektorem $\vec{b}$.

2.5 Hodnost a subdeterminant

V této části si ukážeme souvislost hodnosti a determinantu matice. V historii byla hodnost definována nejprve pomocí determinantů, až později vznikla „naše“ současná definice. Pozor! Připouštíme nyní i obdélníkové matice (na rozdíl od předcházejícího textu této kapitoly).

[11] Gabriel Cramer (1704–1752), švýcarský matematik
[12] Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–1796), francouzský matematik, chemik a hudebník

Definice 2.48. Nechť $\mathbb{A} \in T^{m,n}$. Nechť čísla $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \widehat{m}$ a $j_1, j_2, \ldots, j_\ell \in \widehat{n}$ splňují:

$$1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq m \quad \text{a} \quad 1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_\ell \leq n.$$

Pak matici $\mathbb{A}\begin{pmatrix} i_1, \, i_2, \, \ldots, \, i_k \\ j_1, \, j_2, \, \ldots, \, j_\ell \end{pmatrix}$, jež vznikla z $\mathbb{A}$ zachováním pouze těch prvků, které mají řádkový index z $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ a zároveň sloupcový index z $\{j_1, j_2, \ldots, j_\ell\}$, nazveme **submaticí** matice $\mathbb{A}$. [13] Je-li submatice čtvercová řádu k, pak její determinant nazveme **subdeterminantem (minorem)** řádu k matice $\mathbb{A}$.

Příklad 2.49. Nechť $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$. Pak $\mathbb{A}\begin{pmatrix} 2, \, 3 \\ 1, \, 3, \, 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 12 \end{pmatrix}$.

Věta 2.50 (Hodnost a subdeterminant)**.** *Nechť $\mathbb{A} \in T^{m,n}$. Pak $h(\mathbb{A}) = k$, právě když existuje nenulový subdeterminant matice $\mathbb{A}$ řádu k a zároveň je každý subdeterminant vyššího řádu nulový.*

[13] Používá se i českému uchu lépe znějící pojem podmatice.

2.6 Determinant operátoru

Definice 2.51. Nechť V_n je vektorový prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$ nad tělesem T. Nechť $\mathcal{X}$ je libovolná báze V_n a $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Pak **determinant operátoru** A značíme $\det A$ a klademe jej roven $\det A := \det({}^{\mathcal{X}}A)$.

Poznámka 2.52. Je třeba ověřit korektnost definice, tedy nezávislost na volbě báze. Je-li $\mathcal{Y}$ také báze V_n, pak ${}^{\mathcal{X}}A = ({}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}})({}^{\mathcal{Y}}A)({}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}})$. Podle věty o matici složeného zobrazení víme, že matice ${}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}}$ a ${}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}$ jsou k sobě inverzní (platí totiž ${}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}}\,{}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}I = \mathbb{I}$). Proto dostáváme užitím věty 2.31:

$$\det({}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}})\det({}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}) = 1.$$

Nakonec podle věty 2.30 máme:

$$\det({}^{\mathcal{X}}A) = \det\left(({}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}})({}^{\mathcal{Y}}A)({}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}})\right) = \det({}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}})\det({}^{\mathcal{Y}}A)\det({}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}) = \det({}^{\mathcal{Y}}A).$$

3 Spektrální teorie

Pod označením „spektrální teorie“ budeme rozumět vlastní čísla neboli spektrum, vlastní vektory a diagonalizovatelnost matic a operátorů. Měli bychom spíše říkat „úvod do spektrální teorie“, protože spektrum operátorů ve vektorových prostorech nekonečné dimenze je definováno obecněji. Vlastní čísla tvoří jen část spektra, říká se jí bodové (též diskrétní) spektrum. Ale spektrum může mít i část spojitou a reziduální, jak se dozvíte ve funkcionální analýze.

Motivace. Spektrální teorie má velmi širokou škálu uplatnění. Pro ilustraci uvedeme jen několik oblastí, ale sami uvidíte v budoucnu, že se s vlastními čísly a vlastními vektory matic a operátorů budete setkávat na každém kroku. V matematice využijete spektrální teorii při vyšetřování charakteru kvadratických forem, při řešení obyčejných lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty, v iteračních metodách, v teorii grafů atd. V kvantové mechanice popisují vlastní vektory Schrödingerova operátoru stacionární stavy elektronů v atomech. Vlastní číslo pak odpovídá vlastní energii. U oscilátorů je velmi důležitá vlastní frekvence kmitů, která souvisí s rezonancí (např. při konstrukci mostů je třeba umět počítat vlastní čísla). Spektrální teorie se dále aplikuje v analýze vibrací, zpracování obrazu, ale třeba i při určování rychlosti šíření epidemií.

Nejprve se budeme věnovat spektrální teorii matic, která je trochu jednodušší než spektrální teorie operátorů, jelikož nevyžaduje hlídání tělesa. Matice totiž automaticky považujeme za prvky prostoru $\mathbb{C}^{n,n}$.

3.1 Vlastní čísla a vlastní vektory matic

Definice 3.1. Nechť je dána matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ nazveme **vlastním číslem** matice $\mathbb{A}$, pokud existuje vektor $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$, $\vec{x} \neq \vec{0}$, takový, že $\mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Vektor $\vec{x}$ nazveme **vlastním vektorem** matice $\mathbb{A}$ příslušným vlastnímu číslu λ. Množinu vlastních čísel matice $\mathbb{A}$ nazveme **spektrem** matice $\mathbb{A}$ a značíme $\sigma(\mathbb{A})$. **Vlastním podprostorem** matice $\mathbb{A}$ příslušným vlastnímu číslu λ rozumíme $P_\lambda := \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n \mid \mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}\}$, tj. P_λ je množina vlastních vektorů $\mathbb{A}$ příslušných λ s přidáním nulového vektoru. [14]

Poznámka 3.2. Matice s reálnými prvky nemusí mít reálná vlastní čísla. Například $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ má vlastní číslo i s vlastním vektorem $\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$, protože

$$\mathbb{A}\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = \mathrm{i}\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[14] V angličtině se používají názvy eigenvalue, eigenvector a eigenspace [výslovnost „ajgn-“] popořadě pro vlastní číslo, vlastní vektor a vlastní podprostor. Ovšem názvosloví ovlivnil německý matematik David Hilbert (1862–1943).

Věta 3.3 (Vlastní podprostor)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ *a* $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$*. Pak* $P_\lambda \subset\subset \mathbb{C}^n$*. Navíc* $\{\mathbb{A}\vec{x} \mid \vec{x} \in P_\lambda\} \subset P_\lambda$.

Definice 3.4. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ a $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$. Potom **geometrickou násobností** vlastního čísla λ nazveme $\nu_g(\lambda) := \dim P_\lambda$.
Slovy: „Geometrická násobnost vlastního čísla λ je počet LN vlastních vektorů $\mathbb{A}$ příslušných λ.“

Hledat vlastní vektory $\mathbb{A}$ příslušné vlastnímu číslu λ znamená řešit homogenní soustavu s maticí $\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}$. Ještě je třeba vědět, jak efektivně hledat vlastní čísla. K tomu potřebujeme definovat charakteristický polynom matice $\mathbb{A}$.

Definice 3.5. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Zobrazení $p_\mathbb{A} \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definované pro každé $t \in \mathbb{C}$ jako $p_\mathbb{A}(t) = \det(\mathbb{A} - t\mathbb{I})$ nazýváme **charakteristickým polynomem** matice $\mathbb{A}$.

Věta 3.6 (Vlastnosti charakteristického polynomu)**.** *Nechť* $p_\mathbb{A}$ *je charakteristický polynom matice* $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$*. Potom platí:*

1. $p_\mathbb{A}$ *je polynom.*
2. *Stupeň* $p_\mathbb{A}$ *je* n *a koeficient u členu nejvyššího stupně* t^n *v* $p_\mathbb{A}(t)$ *je* $(-1)^n$*.*
3. *Konstantní člen polynomu* $p_\mathbb{A}$ *je roven* $\det \mathbb{A}$.

Věta 3.8 (Vlastní čísla a charakteristický polynom)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$*. Pak* $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$*, právě když* $p_{\mathbb{A}}(\lambda) = 0$*.*
Slovy: „λ *je vlastním číslem* $\mathbb{A}$*, právě když* λ *je kořenem charakteristického polynomu.“*

Věta 3.9 (Vlastní čísla trojúhelníkové matice)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ *a* $\mathbb{A}$ *je horní (nebo dolní) trojúhelníková matice. Pak vlastní čísla jsou rovna jejím diagonálním prvkům.*

Definice 3.11. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ a $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$. **Algebraickou násobností** $\nu_a(\lambda)$ vlastního čísla λ nazveme násobnost λ jakožto kořene charakteristického polynomu $p_{\mathbb{A}}$. [16]

Poznámka 3.12. Nechť je dána matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Jelikož je součet násobností v rozkladu polynomu na kořenové činitele roven stupni polynomu, platí:

$$\sum_{\lambda \in \sigma(\mathbb{A})} \nu_a(\lambda) = n.$$

Věta 3.13 (Vlastní čísla a determinant)**.** *Nechť* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *jsou všechna vzájemně různá vlastní čísla matice* $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. *Pak platí:*

$$\det \mathbb{A} = \lambda_1^{\nu_a(\lambda_1)} \lambda_2^{\nu_a(\lambda_2)} \ldots \lambda_k^{\nu_a(\lambda_k)}.$$

Slovy: „Determinant $\mathbb{A}$ *je součinem vlastních čísel* $\mathbb{A}$ *(braných včetně násobností).“*

Důsledek 3.14 (Vlastní čísla a regularita matice)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. *Matice* $\mathbb{A}$ *je regulární, právě když* $0 \notin \sigma(\mathbb{A})$.

[16] V literatuře se někdy značí $\mu_{\mathbb{A}}$ algebraická a $\gamma_{\mathbb{A}}$ geometrická násobnost.

Věta 3.16 (Algebraická a geometrická násobnost)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. *Pak pro každé* $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ *platí:*

$$\nu_a(\lambda) \geq \nu_g(\lambda).$$

Poznámka 3.17. Je-li λ vlastní číslo $\mathbb{A}$, pak zřejmě $\nu_a(\lambda) \geq 1$ a $\nu_g(\lambda) \geq 1$. Podle věty 3.16 dostáváme, že jakmile $\nu_a(\lambda) = 1$, pak také $\nu_g(\lambda) = 1$.

Věta 3.18 (LN vlastních vektorů příslušných různým vlastním číslům)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. *Nechť* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *jsou vzájemně různá vlastní čísla a* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ *jsou jim příslušné vlastní vektory matice* $\mathbb{A}$. *Pak* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ *jsou LN.*

Věta 3.19 (Báze z vlastních vektorů)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. *V prostoru* $\mathbb{C}^n$ *existuje báze z vlastních vektorů matice* $\mathbb{A}$ *právě tehdy, když pro každé* $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ *platí, že* $\nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda)$.

3.2 Diagonalizovatelnost matic

Definice 3.20. Nechť $\mathbb{A}$, $\mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Řekneme, že matice $\mathbb{A}$ je **podobná** matici $\mathbb{B}$, pokud existuje regulární matice $\mathbb{X}$ řádu n taková, že $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{B}\mathbb{X}^{-1}$.

Poznámka 3.21. Podobnost je ekvivalence na množině čtvercových matic řádu n, tj. platí:

(a) Reflexivita: $\mathbb{A}$ je podobná sama sobě.

(b) Symetrie: Je-li $\mathbb{A}$ podobná $\mathbb{B}$, pak $\mathbb{B}$ je podobná $\mathbb{A}$.

(c) Tranzitivita: Je-li $\mathbb{A}$ podobná $\mathbb{B}$ a $\mathbb{B}$ podobná $\mathbb{C}$, pak i $\mathbb{A}$ je podobná $\mathbb{C}$.

Věta 3.22 (Vlastnosti podobných matic)**.** *Nechť* $\mathbb{A}$, $\mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$ *a* $\mathbb{A}$ *je podobná* $\mathbb{B}$.

1. *Pak* $p_{\mathbb{A}} = p_{\mathbb{B}}$, *tedy i* $\sigma(\mathbb{A}) = \sigma(\mathbb{B})$ *a* $\nu_a^{\mathbb{A}}(\lambda) = \nu_a^{\mathbb{B}}(\lambda)$ *pro každé* $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$, *kde* $\nu_a^{\mathbb{A}}(\lambda)$ *značí algebraickou násobnost* λ *pro matici* $\mathbb{A}$ *a* $\nu_a^{\mathbb{B}}(\lambda)$ *pro* $\mathbb{B}$.

2. *Je-li* $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$, *pak* $\nu_g^{\mathbb{A}}(\lambda) = \nu_g^{\mathbb{B}}(\lambda)$, *kde* $\nu_g^{\mathbb{A}}(\lambda)$ *značí geometrickou násobnost* λ *pro matici* $\mathbb{A}$ *a* $\nu_g^{\mathbb{B}}(\lambda)$ *pro* $\mathbb{B}$.

3. *Potom* $\det \mathbb{A} = \det \mathbb{B}$ *a* $\mathrm{Tr}(\mathbb{A}) = \mathrm{Tr}(\mathbb{B})$.

Nabízí se otázka, do jaké nejjednodušší podoby lze matici podobnostní transformací převést, tj. jaké nejjednodušší matici je daná matice podobná. Speciálně se ptáme, zda je každá čtvercová matice podobná **diagonální** matici, tedy matici, jejíž všechny prvky kromě diagonálních jsou nulové (a diagonální mohou být nulové i nenulové).

Definice 3.25. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Potom matici $\mathbb{A}$ nazveme **diagonalizovatelnou**, pokud je podobná diagonální matici, tj. existují diagonální matice $\mathbb{D}$ a regulární matice $\mathbb{X}$ takové, že $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}$.

Poznámka 3.26. Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{D}, \mathbb{X} \in \mathbb{C}^{n,n}$, matice $\mathbb{D}$ je diagonální a $\mathbb{X}$ je regulární. Potom $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}$ právě tehdy, když $\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{X}\mathbb{D}$. Odtud je dobře vidět, že označíme-li $\vec{x}_i$ i-tý sloupec $\mathbb{X}$ a λ_i i-té číslo na diagonále $\mathbb{D}$, pak $\mathbb{A}\vec{x}_i = \lambda_i \vec{x}_i$. Sloupce matice $\mathbb{X}$ jsou tudíž vlastními vektory matice $\mathbb{A}$ a čísla na diagonále $\mathbb{D}$ jsou vlastními čísly $\mathbb{A}$.

Věta 3.27 (Diagonalizovatelnost a báze z vlastních vektorů)**.** *Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Pak matice $\mathbb{A}$ je diagonalizovatelná, právě když v $\mathbb{C}^n$ existuje báze z vlastních vektorů $\mathbb{A}$.*

Při praktickém ověřování, zda je matice diagonalizovatelná, se nám lépe bude hodit následující tvrzení, které je důsledkem vět 3.19 a 3.27.

Věta 3.28 (Diagonalizovatelnost a násobnosti)**.** *Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Potom matice $\mathbb{A}$ je diagonalizovatelná, právě když pro každé $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ platí $\nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda)$.*

Poznámka 3.29. Z důkazů vět 3.19 a 3.27 víme, jak najdeme regulární matici $\mathbb{X}$ a diagonální matici $\mathbb{D}$ tak, aby $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}$. Je to možné, pokud jsou algebraické a geometrické násobnosti všech vlastních čísel shodné. V takovém případě umíme najít tolik LN vlastních vektorů ke každému vlastnímu číslu, kolik je jeho geometrická (a tedy i algebraická) násobnost. Z těchto vektorů sestavíme matici $\mathbb{X}$. Matice $\mathbb{D}$ má pak na diagonále vlastní čísla příslušná nalezeným vlastním vektorům v pořadí daném pořadím sloupců matice $\mathbb{X}$.

Poznámka 3.31. Zatímco podobnostní transformace zachovávají vlastní čísla a diagonalizovatelnost matic, ekvivalentní řádkové úpravy mohou vlastní čísla matice měnit a mohou měnit i diagonalizovatelnost. Například následující matice $\mathbb{B}$ vznikla z $\mathbb{A}$ záměnou řádků, ale $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ má různá vlastní čísla 0 a 1, je tedy diagonalizovatelná, zatímco $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ má pouze vlastní číslo 0 s $\nu_a(0) = 2 > 1 = \nu_g(0)$, proto není diagonalizovatelná.

Poznámka 3.32. Viděli jsme, že ne každou matici lze diagonalizovat. Bez důkazu uveďme, že každá matice je podobná matici $\mathbb{J}$ v **Jordanově kanonickém tvaru**, [17] kde

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{pmatrix}$$

je v blokově diagonálním tvaru (na diagonále jsou Jordanovy bloky J_i a mimo ně jsou

[17] Marie Ennemond Camille Jordan [výslovnost „žordán“] (1838–1922), francouzský matematik

samé nuly). Jordanův blok má tvar:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Jordanův kanonický tvar je pro každou matici jedinečný až na pořadí bloků, počet Jordanových bloků odpovídajících vlastnímu číslu λ je roven $\nu_g(\lambda)$ a součet řádů bloků odpovídajících λ je roven $\nu_a(\lambda)$. Důkaz lze najít např. v [4].

Kapitolu uzavřeme zajímavým pozorováním, že každá matice je kořenem svého charakteristického polynomu. Větu dokázal Caley [18] pouze pro matice řádu dva a tři a v plné obecnosti pak Hamilton. [19]

Věta 3.34 (Hamiltonova–Caleyho)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$*. Pak matice* $\mathbb{A}$ *je kořenem svého charakteristického polynomu, tj. je-li* $p_{\mathbb{A}}(t) = \beta_n t^n + \beta_{n-1} t^{n-1} + \ldots + \beta_1 t + \beta_0$ *pro každé* $t \in \mathbb{C}$*, pak platí:*

$$p_{\mathbb{A}}(\mathbb{A}) := \beta_n \mathbb{A}^n + \beta_{n-1} \mathbb{A}^{n-1} + \ldots + \beta_1 \mathbb{A} + \beta_0 \mathbb{I} = \mathbb{O}.$$

[18] Arthur Cayley (1821–1895), anglický matematik a právník
[19] William Rowan Hamilton (1805–1865), irský matematik, fyzik a astronom

3.3 Vlastní čísla a vlastní vektory operátorů

Úlohu hledat vlastní čísla a vlastní vektory operátorů v prostorech konečné dimenze převedeme na řešení stejné úlohy pro matice. Ovšem musíme mít pořád na paměti, že na rozdíl od matic, kde pracujeme vždy nad tělesem komplexních čísel, [20] je třeba u operátorů hlídat, nad kterým tělesem jsou definovány. V prostorech nekonečné dimenze je vyšetřování spektrálních vlastností operátorů složitější a bude se mu věnovat později předmět funkcionální analýza.

Definice 3.36. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a je dán operátor $A \in \mathcal{L}(V)$. Číslo $\lambda \in T$ nazveme **vlastním číslem operátoru** A, pokud existuje vektor $\vec{x} \in V$, $\vec{x} \neq \vec{0}$, takový, že $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Vektor $\vec{x}$ nazveme **vlastním vektorem operátoru** A příslušným vlastnímu číslu λ. Množinu vlastních čísel nazveme **spektrem operátoru** A a označíme

[20] Náš přístup, kdy matice považujeme automaticky za prvky prostoru $\mathbb{C}^{n,n}$, je pohodlnější a snad i častější. Ovšem například pan asistent Pytlíček při vyšetřování vlastních čísel a vlastních vektorů matic vždy uváděl, z jakého prostoru $T^{n,n}$ matice je. Musel být proto při práci s maticemi stejně opatrný, jako my budeme muset být při práci s operátory. Pro reálnou matici se totiž mohla její vlastní čísla lišit podle toho, zda byla matice považována za prvek $\mathbb{C}^{n,n}$ nebo $\mathbb{R}^{n,n}$. Necháme na čtenáři, aby si podrobnosti rozmyslel sám.

$\sigma(A)$. **Vlastním podprostorem operátoru** A příslušným vlastnímu číslu λ rozumíme $P_\lambda := \{\vec{x} \in V \mid A\vec{x} = \lambda\vec{x}\}$, tj. P_λ je množina vlastních vektorů operátoru A příslušných vlastnímu číslu λ s přidáním nulového vektoru.

Věta 3.37 (Vlastní podprostor operátoru)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V)$. Potom $P_\lambda \subset\subset V$. Navíc $A(P_\lambda) \subset P_\lambda$.*

Věta 3.39 (LN vlastních vektorů operátoru příslušných různým vlastním číslům)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V)$. Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ jsou vzájemně různá vlastní čísla a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ jsou jim příslušné vlastní vektory operátoru A. Pak $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ jsou LN.*

Definice 3.40. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V)$. Nechť $\lambda \in \sigma(A)$. Potom **geometrickou násobností** vlastního čísla λ nazveme $\nu_g(\lambda) := \dim P_\lambda$.
Slovy: „Geometrická násobnost vlastního čísla λ je počet LN vlastních vektorů A příslušných λ.“

Ve zbytku kapitoly o spektrální teorii operátorů se omezíme na vektorový prostor V_n konečné dimenze. V něm budeme mít pro vyšetřování spektrálních vlastností operátorů stejný aparát jako u matic.

Definice 3.41. Nechť V_n je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Nechť $\mathcal{X}$ je báze V_n. Potom **charakteristickým polynomem** p_A operátoru A nazýváme charakteristický polynom matice ${}^{\mathcal{X}}A$.

Poznámka 3.42. Definice je korektní, protože p_A nezávisí na volbě báze. Jsou-li totiž $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ báze V_n a označíme-li $\mathbb{A} = {}^{\mathcal{X}}A$ a $\mathbb{B} = {}^{\mathcal{Y}}A$, potom platí podle definice 2.51 determinantu operátoru pro každé $t \in T$:

$$\det(\mathbb{A} - t\mathbb{I}) = \det({}^{\mathcal{X}}(A - tI)) = \det(A - tI) = \det({}^{\mathcal{Y}}(A - tI)) = \det(\mathbb{B} - t\mathbb{I}).$$

Vidíme tudíž, že se polynomy $p_{\mathbb{A}}$ a $p_{\mathbb{B}}$ rovnají v nekonečně mnoha bodech, proto platí $p_{\mathbb{A}}(t) = p_{\mathbb{B}}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

Věta 3.43 (Vlastní čísla operátoru a charakteristický polynom)**.** *Nechť V_n je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Pak $\lambda \in \sigma(A)$, právě když $p_A(\lambda) = 0$ a $\lambda \in T$.*
Slovy: „λ je vlastním číslem A, právě když λ je kořenem charakteristického polynomu a patří do tělesa.“

Definice 3.46. Nechť V_n je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Nechť $\lambda \in \sigma(A)$. **Algebraickou násobností** $\nu_a(\lambda)$ vlastního čísla λ nazveme násobnost λ jakožto kořene charakteristického polynomu p_A.

Poznámka 3.47. Čtenář si sám rozmyslí, že v případě operátoru $A \in \mathcal{L}(V_n)$ již nemusí platit analogie vztahu z poznámky 3.12, tj. neplatí, že $\sum_{\lambda \in \sigma(A)} \nu_a(\lambda) = n$. Pouze platí, že součet násobností kořenů charakteristického polynomu p_A je roven n.

Poznámka 3.48. Podívejme se na vztah mezi vlastními čísly a vlastními vektory matic a operátorů. Nechť V_n je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Dále nechť $\mathcal{X}$ je báze V_n. Označme $\mathbb{A} = {}^{\mathcal{X}}A$.

(a) Z vět 3.43 a 3.8 plyne:

$$\sigma(A) = \sigma(\mathbb{A}) \cap T.$$

(b) Pro $\lambda \in T$ a $\vec{x} \in V_n$ platí:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \;\Leftrightarrow\; \mathbb{A}(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \lambda(\vec{x})_{\mathcal{X}}.$$

(c) Z předchozích bodů dostaneme pro každé $\lambda \in \sigma(A)$:

$$\nu_a^A(\lambda) = \nu_a^{\mathbb{A}}(\lambda) \text{ a } \nu_g^A(\lambda) = \nu_g^{\mathbb{A}}(\lambda),$$

kde symboly A a $\mathbb{A}$ značí, zda jde o násobnost vlastního čísla pro operátor, či matici.

3.4 Diagonalizovatelnost operátorů

Definice 3.50. Nechť V_n je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Operátor A nazveme **diagonalizovatelným**, pokud existuje báze $\mathcal{Y}$ prostoru V_n taková, že ${}^{\mathcal{Y}}A$ je diagonální matice.

Věta 3.51 (Diagonalizovatelnost operátoru a báze z vlastních vektorů)**.** *Nechť V_n je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Nechť $\mathcal{Y}$ je báze V_n. Pak ${}^{\mathcal{Y}}A$ je diagonální matice, právě když $\mathcal{Y}$ je báze V_n z vlastních vektorů A.*

Věta 3.52 (Diagonalizovatelnost operátoru a násobnosti)**.** *Nechť V_n je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Operátor A je diagonalizovatelný, právě když jsou splněny dvě podmínky:*

1. *$p_A^{-1}(0) \subset T$.*
   Slovy: „Kořeny charakteristického polynomu jsou z tělesa.“

2. *$\nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda)$ pro každé $\lambda \in \sigma(A)$.*

Věta 3.54 (Obor hodnot diagonalizovatelného operátoru)**.** *Nechť V_n je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Pokud A je diagonalizovatelný, potom platí:*

1. *$A(V_n) = P_{\lambda_1} \oplus P_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus P_{\lambda_k}$, kde $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ jsou vzájemně různá nenulová vlastní čísla A.*

2. *Pokud $0 \in \sigma(A)$, pak $\ker A = P_0$. V opačném případě $\ker A = \{\vec{0}\}$.*

4 Hermitovské a kvadratické formy

Motivace. Křivky a plochy patří k základním objektům, se kterými se v životě setkáváme, a potřeba popsat je matematicky existuje odedávna. Zmiňme v souvislosti s kuželosečkami alespoň zakladatele analytické geometrie Descarta [21] a Fermata, [22] kteří v 17. století řešili úlohu, jak transformovat kuželosečku na kanonický tvar (laicky řečeno: „tvar, který umíme namalovat“). Třírozměrnou analogií kuželoseček (elipsa, parabola, hyperbola) jsou kvadratické plochy (mezi nimi elipsoid, paraboloid, jedno- a dvojdílný hyperboloid).

Je-li dána symetrická matice $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ (tj. matice splňující $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$), vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ a číslo $c \in \mathbb{R}$, pak **kvadrikou (kvadratickou plochou)** nazveme množinu vektorů $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ splňujících:

$$(\vec{x})^T \mathbb{A}\vec{x} - (\vec{b})^T \vec{x} + c = 0. \tag{4}$$

Ve druhém ročníku se v matematické analýze naučíte kvadriky vyšetřovat a klasifikovat. Budete k tomu využívat znalosti kvadratických forem. Ukažme na jednoduchém příkladě, jak bude takové vyšetřování probíhat.

Nechť je dána kvadrika v $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 4x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 1 = 0 \right\}.$$

Opravdu jde o kvadriku, protože má tvar z definičního vztahu (4):

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \vec{0}, \quad c = -1.$$

Upravíme odpovídající kvadratickou formu na čtverce:

$$4x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 = (2x_1 - \tfrac{1}{2}x_2)^2 + (\tfrac{\sqrt{2}}{2}x_2)^2 + (2x_3 - \tfrac{1}{2}x_2)^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2,$$

přičemž

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 & \qquad x_1 &= \tfrac{1}{2}\alpha_1 + \tfrac{\sqrt{2}}{4}\alpha_2 \\ \alpha_2 &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}x_2 & x_2 &= \sqrt{2}\alpha_2 \\ \alpha_3 &= 2x_3 - \tfrac{1}{2}x_2 & x_3 &= \tfrac{\sqrt{2}}{4}\alpha_2 + \tfrac{1}{2}\alpha_3. \end{aligned}$$

Můžeme tedy vyšetřovanou kvadriku přepsat do následujícího tvaru:

$$\left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 \right\}.$$

Z tohoto tvaru je snadné uhádnout, o jakou kvadriku jde, a vykreslit ji. Stačí namalovat kulovou plochu o poloměru jedna se středem v počátku a na každý její bod nechat působit

[21] René Descartes [výslovnost „dekárt“] (1596–1650), francouzský filozof, matematik a fyzik

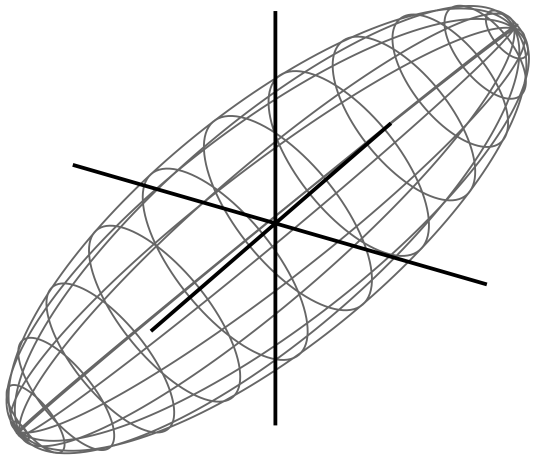
[22] Pierre de Fermat [výslovnost „ferma“] (1601–1665), francouzský matematik

odpovídající lineární transformaci – tedy vynásobit každý bod maticí $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Lineární transformace kulovou plochu protáhne do elipsoidu. Výsledek je na obrázku 3.

Také můžeme kvadriku upravit ještě do jiného ekvivalentního tvaru:

$$\left\{ \vec{x} = \alpha_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 \right\}.$$

Z tohoto tvaru lze zase vyčíst, že zadaná kvadrika obsahuje právě ty vektory, jejichž souřadnice v bázi $\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right)$ leží na kulové ploše o poloměru jedna se středem v počátku.



Obrázek 3: Ilustrace kvadriky z motivačního textu – elipsoidu.

V celé kapitole si pod tělesem T představujeme pouze $\mathbb{C}$ nebo $\mathbb{R}$ (všechna tvrzení by platila i pro ostatní číselná tělesa, která jsou uzavřená na komplexní sdružování – bystrý čtenář si rozmyslí, proč musí být splněna právě tato podmínka).

4.1 Hermitovské formy

Definice 4.1. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Zobrazení $h\colon V \times V \to T$ nazveme **hermitovskou formou**, pokud jsou splněny dvě podmínky:

1. **hermitovskost**: pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V$ platí, že $h(\vec{x}, \vec{y}) = \overline{h(\vec{y}, \vec{x})}$,
2. **linearita v prvním argumentu**: pro každé $\alpha \in T$ a $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ je splněno, že $h(\alpha\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = \alpha h(\vec{x}, \vec{z}) + h(\vec{y}, \vec{z})$.

Diagonálou hermitovské formy h nazýváme zobrazení $Q\colon V \to T$ definované pro každé $\vec{x} \in V$ jako $Q(\vec{x}) \coloneqq h(\vec{x}, \vec{x})$.

Poznámka 4.2. Speciálně pro $T = \mathbb{R}$ můžeme u první vlastnosti hermitovské formy [23] vynechat komplexní sdružování, tedy požadujeme, aby pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V$ platilo $h(\vec{x}, \vec{y}) = h(\vec{y}, \vec{x})$. Vlastnosti pak říkáme **symetrie**.

Věta 4.3 (Vlastnosti hermitovské formy a diagonály)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť h je hermitovská forma na V a Q její diagonála. Pro každé $\alpha \in T$ a $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ platí:*

1. ***antilinearita*** [24] ***ve druhém argumentu**: $h(\vec{x}, \alpha\vec{y} + \vec{z}) = \overline{\alpha} h(\vec{x}, \vec{y}) + h(\vec{x}, \vec{z})$,*
2. *$Q(\vec{x}) \in \mathbb{R}$,*
3. *$Q(\alpha\vec{x}) = |\alpha|^2 Q(\vec{x})$,*
4. *$Q(\vec{x} + \vec{y}) = Q(\vec{x}) + 2\mathrm{Re}(h(\vec{x}, \vec{y})) + Q(\vec{y})$,*
5. ***rovnoběžníková rovnost**:*
$$Q(\vec{x} + \vec{y}) + Q(\vec{x} - \vec{y}) = 2\left(Q(\vec{x}) + Q(\vec{y})\right),$$
6. ***polarizační identity**:*
pro $T = \mathbb{R}$
$$h(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4}\Big(Q(\vec{x} + \vec{y}) - Q(\vec{x} - \vec{y})\Big),$$
pro $T = \mathbb{C}$
$$h(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4}\Big(Q(\vec{x} + \vec{y}) - Q(\vec{x} - \vec{y})\Big) + \frac{\mathrm{i}}{4}\Big(Q(\vec{x} + \mathrm{i}\vec{y}) - Q(\vec{x} - \mathrm{i}\vec{y})\Big).$$

Důkaz.

1. Z definice hermitovské formy a z vlastností komplexního sdružování plyne:
$$\begin{aligned} h(\vec{x}, \alpha\vec{y} + \vec{z}) &= \overline{h(\alpha\vec{y} + \vec{z}, \vec{x})} &&= \overline{\alpha h(\vec{y}, \vec{x}) + h(\vec{z}, \vec{x})} \\ &= \overline{\alpha}\,\overline{h(\vec{y}, \vec{x})} + \overline{h(\vec{z}, \vec{x})} &&= \overline{\alpha} h(\vec{x}, \vec{y}) + h(\vec{x}, \vec{z}). \end{aligned}$$
2. Vlastnost plyne z hermitovskosti h:
$$Q(\vec{x}) = h(\vec{x}, \vec{x}) = \overline{h(\vec{x}, \vec{x})} = \overline{Q(\vec{x})},$$
proto $Q(\vec{x}) \in \mathbb{R}$.

[23] Charles Hermite [výslovnost „ermit“] (1822–1901), francouzský matematik
[24] Antilinearitu najdete také občas pod názvem semilinearita.

3. S využitím linearity a antilinearity h máme:

$$Q(\alpha\vec{x}) = h(\alpha\vec{x}, \alpha\vec{x}) = \alpha\overline{\alpha}h(\vec{x}, \vec{x}) = |\alpha|^2 Q(\vec{x}).$$

4. Opět s využitím linearity, antilinearity a hermitovskosti h dostáváme:

$$\begin{aligned} Q(\vec{x}+\vec{y}) &= h(\vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}) \\ &= h(\vec{x}, \vec{x}+\vec{y}) + h(\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}) \\ &= Q(\vec{x}) + h(\vec{x}, \vec{y}) + h(\vec{y}, \vec{x}) + Q(\vec{y}) \\ &= Q(\vec{x}) + 2\mathrm{Re}(h(\vec{x}, \vec{y})) + Q(\vec{y}). \end{aligned}$$

5. Jde o přímý důsledek předchozího bodu.

6. Dokažme tvrzení pro $T = \mathbb{C}$, pro $T = \mathbb{R}$ si čtenář obdobným způsobem poradí sám. S využitím čtvrtého bodu, antilinearity a posléze třetího bodu máme:

$$\begin{aligned} Q(\vec{x}+\vec{y}) &= Q(\vec{x}) + 2\mathrm{Re}(h(\vec{x}, \vec{y})) + Q(\vec{y}) \\ Q(\vec{x}-\vec{y}) &= Q(\vec{x}) + 2\mathrm{Re}(-h(\vec{x}, \vec{y})) + Q(-\vec{y}) &&= Q(\vec{x}) - 2\mathrm{Re}(h(\vec{x}, \vec{y})) + Q(\vec{y}) \\ Q(\vec{x}+\mathrm{i}\vec{y}) &= Q(\vec{x}) + 2\mathrm{Re}(-\mathrm{i}h(\vec{x}, \vec{y})) + Q(\mathrm{i}\vec{y}) &&= Q(\vec{x}) + 2\mathrm{Im}(h(\vec{x}, \vec{y})) + Q(\vec{y}) \\ Q(\vec{x}-\mathrm{i}\vec{y}) &= Q(\vec{x}) + 2\mathrm{Re}(\mathrm{i}h(\vec{x}, \vec{y})) + Q(\mathrm{i}\vec{y}) &&= Q(\vec{x}) - 2\mathrm{Im}(h(\vec{x}, \vec{y})) + Q(\vec{y}). \end{aligned}$$

   Odtud plyne:

$$Q(\vec{x}+\vec{y}) - Q(\vec{x}-\vec{y}) + \mathrm{i}Q(\vec{x}+\mathrm{i}\vec{y}) - \mathrm{i}Q(\vec{x}-\mathrm{i}\vec{y}) = 4\mathrm{Re}(h(\vec{x}, \vec{y})) + \mathrm{i}4\mathrm{Im}(h(\vec{x}, \vec{y})) = 4h(\vec{x}, \vec{y}).$$

$\square$

Poznámka 4.4.

- Občas se pro označení linearity v prvním argumentu a antilinearity ve druhém argumentu používá pojem **sesquilineární** formy. [25]
- Pro $T = \mathbb{R}$ lze vynechat komplexní sdružování u vlastnosti antilinearity. Taková forma je tedy lineární v prvním i druhém argumentu, hovoříme pak někdy o **bilineárních** formách.
- Polarizační identity vyjadřují netriviální fakt, že hermitovská forma je jednoznačně určena svou diagonálou.

Definice 4.5. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť h je hermitovská forma na V. **Nulprostorem** hermitovské formy h nazveme množinu:

$$N_h = \{\vec{x} \in V \mid h(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \text{ pro každé } \vec{y} \in V\}.$$

Nulitou formy h pak rozumíme číslo $\dim N_h$. Hermitovskou formu h nazýváme **regulární**, pokud $\dim N_h = 0$. V opačném případě ji nazýváme **singulární**.

[25] Předpona sesqui- je z latiny a znamená „jeden a půl“.

Aby definice nulity byla korektní, potřebujeme vědět, že nulprostor je podprostorem V.

Věta 4.6 (O nulprostoru)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť h je hermitovská forma na V. Pak $N_h \subset\subset V$.*

Důkaz. Z definice plyne, že $N_h \subset V$. Jelikož platí $h(\vec{0}, \vec{y}) = 0$ pro každé $\vec{y} \in V$, patří $\vec{0}$ do N_h, tedy $N_h \neq \emptyset$. Pokud $\vec{x}, \vec{z} \in N_h$ a $\alpha \in T$, pak $h(\alpha\vec{x} + \vec{z}, \vec{y}) = \alpha h(\vec{x}, \vec{y}) + h(\vec{z}, \vec{y}) = \alpha 0 + 0 = 0$ pro každé $\vec{y} \in V$, proto $\alpha\vec{x} + \vec{z} \in N_h$. □

4.2 Polární báze

Uvažujme nyní vektorový prostor V_n konečné dimenze rovné $n \in \mathbb{N}$ a v něm bázi $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$. Najdeme podmínku, kterou musí splňovat báze $\mathcal{X}$, aby v ní daná hermitovská forma h a její diagonála Q měly jednoduchý tvar. Nechť $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$ a $\vec{y} = \sum_{j=1}^n \beta_j \vec{x}_j$, potom s využitím linearity v prvním a antilinearity ve druhém argumentu dostáváme:

$$h(\vec{x}, \vec{y}) = h\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i, \sum_{j=1}^n \beta_j \vec{x}_j\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n \overline{\beta_j} h(\vec{x}_i, \vec{x}_j),$$

$$Q(\vec{x}) = h(\vec{x}, \vec{x}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n \overline{\alpha_j} h(\vec{x}_i, \vec{x}_j).$$

Pokud báze splňuje podmínku $h(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = 0$ pro $i \neq j$, zjednoduší se předchozí výrazy následovně:

$$h(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{\beta_i} h(\vec{x}_i, \vec{x}_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{\beta_i} Q(\vec{x}_i),$$

$$Q(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{\alpha_i} h(\vec{x}_i, \vec{x}_i) = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 Q(\vec{x}_i).$$

Jak uvidíme, taková báze prostoru V_n vždy existuje.

Definice 4.7. Nechť V_n je vektorový prostor nad tělesem T a h je hermitovská forma na V_n a nechť $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je báze V_n. Pokud $h(\vec{a}_i, \vec{a}_j) = 0$ pro každé $i, j \in \hat{n},\ i \neq j$, pak $\mathcal{A}$ nazveme **polární bází** hermitovské formy h.

Věta 4.8 (Existence polární báze)**.** *Nechť h je hermitovská forma na vektorovém prostoru V_n nad tělesem T. Pak existuje polární báze hermitovské formy h.*

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí podle n. Pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé.

(a) Když $h(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V_n$, pak libovolná báze je polární.

(b) Nechť existují $\vec{x}, \vec{y} \in V_n$ takové, že $h(\vec{x}, \vec{y}) \neq 0$. Z polarizační identity pak plyne, že existuje vektor $\vec{a}$, pro který $Q(\vec{a}) \neq 0$. Definujeme $\varphi\colon V_n \to T$ předpisem $\varphi(\vec{x}) = h(\vec{x}, \vec{a})$. Potom díky linearitě h v prvním argumentu platí, že $\varphi \in {V_n}^{\#}$, a jelikož $\varphi(\vec{a}) \neq 0$, je $\varphi \neq \Theta$. Tudíž $d(\varphi) = n - 1$.

Označme $L = \ker \varphi$ a označme h_L zúžení h na L. Protože $\dim L = n-1$, existuje podle indukčního předpokladu polární báze $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{n-1})$ prostoru L příslušná hermitovské formě h_L. Dokážeme, že pokud položíme $\vec{a}_n = \vec{a}$, pak soubor $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ je hledanou polární bází V_n.

- Pro důkaz, že soubor je bází, stačí ověřit, že $L \cap [\vec{a}]_\lambda = \{\vec{0}\}$. Uvažujme $\vec{x} \in L \cap [\vec{a}]_\lambda$, tj. $\vec{x} = \alpha\vec{a}$ a současně $\varphi(\alpha\vec{a}) = h(\alpha\vec{a}, \vec{a}) = \alpha Q(\vec{a}) = 0$. Jelikož zároveň $Q(\vec{a}) \neq 0$, je nutně $\alpha = 0$, tudíž $\vec{x} = \vec{0}$.
- Fakt, že je báze polární, plyne přímo z definice φ. □

Poznámka 4.9. Polární báze není jednoznačně daná. Snadno si například rozmyslíme, že pokud nahradíme v polární bázi libovolný vektor jeho nenulovým násobkem, pak báze zůstane polární. Na cvičení se naučíme báze konstruovat a uvidíme, že polární báze mohou být pro stejnou hermitovskou formu opravdu rozmanité.

Následující tvrzení se hodí pro praktické hledání polární báze.

Věta 4.10 (Hledání polární báze)**.** *Nechť h je hermitovská forma na vektorovém prostoru V_n nad tělesem T a Q její diagonála. Nechť $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ je báze V_n. Nechť existují $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{R}$ taková, že*

$$Q(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 q_j$$

pro každé $\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{a}_j$. Pak $q_\ell = Q(\vec{a}_\ell)$ pro každé $\ell \in \hat{n}$ a $\mathcal{A}$ je polární báze h.

Důkaz. Dosadíme-li $\vec{x} = \vec{a}_\ell$, pak $Q(\vec{a}_\ell) = |1|^2 q_\ell = q_\ell$. Pro důkaz, že báze je polární, uvažujme $T = \mathbb{C}$. Čtenář obdobným způsobem ošetří případ $T = \mathbb{R}$. Podle polarizační identity dostaneme pro $k \neq \ell$:

$$\begin{aligned}
h(\vec{a}_k, \vec{a}_\ell) &= \tfrac{1}{4}\Big(Q(\vec{a}_k + \vec{a}_\ell) - Q(\vec{a}_k - \vec{a}_\ell)\Big) + \tfrac{\mathrm{i}}{4}\Big(Q(\vec{a}_k + \mathrm{i}\vec{a}_\ell) - Q(\vec{a}_k - \mathrm{i}\vec{a}_\ell)\Big) \\
&= \tfrac{1}{4}\Big(|1|^2 q_k + |1|^2 q_\ell - |1|^2 q_k - |-1|^2 q_\ell\Big) + \tfrac{\mathrm{i}}{4}\Big(|1|^2 q_k + |\mathrm{i}|^2 q_\ell - |1|^2 q_k - |-\mathrm{i}|^2 q_\ell\Big) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Příklad 4.11. Nechť je hermitovská forma h na $\mathbb{R}^2$ definována pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ a $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ jako $h(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + 6x_2 y_2 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1$. Najděte polární bázi h.

Řešení: Není těžké ověřit, že h je hermitovská forma. Práci nám ulehčí, uvědomíme-li si, že $h(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x})^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \vec{y}$. Pro nalezení polární báze upravíme diagonálu **Lagrangeovou**

metodou [26] na součet čtverců (hovoříme také o redukci nebo o upravení do kanonického tvaru):

$$Q(\vec{x}) = x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_1x_2 = (x_1 + 2x_2)^2 + 2x_2^2 = \alpha_1^2 + 2\alpha_2^2.$$

Pak postupně dostáváme:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= x_1 + 2x_2, \qquad & x_1 &= \alpha_1 - 2\alpha_2, \\ \alpha_2 &= x_2, & x_2 &= \alpha_2. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že $\vec{x} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Proto pro souřadnice $\vec{x}$ v bázi $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ má diagonála tvar lineární kombinace čtverců. Podle věty 4.10 je $\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ polární báze h.

Podívejme se nyní na vztah mezi nulprostorem a polární bází. Bude se nám hodit následující lemma.

Lemma 4.12. *Nechť h je hermitovská forma na vektorovém prostoru V_n a Q její diagonála. Nechť $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je polární báze h. Pokud $Q(\vec{a}_i) = 0$, pak $\vec{a}_i \in N_h$.*

Důkaz. Nechť $\vec{y} \in V_n$ a $\vec{y} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \vec{a}_j$. Pak s využitím faktu, že $\mathcal{A}$ je polární báze, máme $h(\vec{a}_i, \vec{y}) = \sum_{j=1}^n \overline{\alpha_j} h(\vec{a}_i, \vec{a}_j) = \overline{\alpha_i} Q(\vec{a}_i) = 0$. Proto $\vec{a}_i \in N_h$. □

Věta 4.13 (Nulprostor a polární báze)**.** *Nechť h je hermitovská forma na vektorovém prostoru V_n nad tělesem T a Q její diagonála. Nechť $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je polární báze h. Nechť existuje $k \in \hat{n}$ tak, že $Q(\vec{a}_j) = 0$ pro každé $j \leq k$ a $Q(\vec{a}_j) \neq 0$ pro $j > k$. Pak $N_h = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k]_\lambda$. Pokud naopak $Q(\vec{a}_j) \neq 0$ pro každé $j \in \hat{n}$, pak $N_h = \{\vec{0}\}$.*

Důkaz. Dokažme nejprve první část tvrzení.

- $N_h \supset [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k]_\lambda$: Podle lemmatu 4.12 patří $\vec{a}_j$ do nulprostoru pro každé $j \in \widehat{k}$. Jelikož $N_h \subset\subset V_n$, obsahuje N_h i libovolnou LK svých vektorů.

- $N_h \subset [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k]_\lambda$: Nechť $\vec{x} \in N_h$ a $\vec{x} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \vec{a}_j$. Pak pro každé $\vec{y} \in V_n$ platí, že $h(\vec{x}, \vec{y}) = 0$. Dosazujeme-li postupně $\vec{y} = \vec{a}_i$ pro $i > k$, dostáváme:

$$0 = h(\vec{x}, \vec{a}_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_j h(\vec{a}_j, \vec{a}_i) = \alpha_i Q(\vec{a}_i).$$

  Jelikož $Q(\vec{a}_i) \neq 0$, musí být $\alpha_i = 0$ pro $i > k$. Odtud plyne, že $\vec{x} = \sum_{j=1}^k \alpha_j \vec{a}_j$, tedy $\vec{x} \in [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k]_\lambda$.

V důkazu druhé části tvrzení se postupuje analogicky jako v důkazu druhé z inkluzí. □

[26] Joseph Louis Lagrange [výslovnost „lagránž“] (1855–1938), francouzský matematik

Shrňme slovy tvrzení předchozí věty: „Nulprostor je roven LO generovanému těmi vektory z polární báze, které mají nulovou hodnotu diagonály (pokud nějaké takové existují).“

Důsledek 4.14. *Nechť h je hermitovská forma na vektorovém prostoru V_n nad tělesem T a Q její diagonála. Nechť $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je polární báze h. Pak počet nul v posloupnosti $(Q(\vec{a}_1), \dots, Q(\vec{a}_n))$ nezáleží na volbě báze $\mathcal{A}$ a je roven nulitě.*

Důkaz. Tvrzení plyne z věty 4.13. □

Úkol 4.15. * Rozmyslete si na základě důkazu věty 4.8 a na základě vztahu mezi nulprostorem a polární bází, zda lze každý nenulový vektor $\vec{x} \in V_n$ doplnit na polární bázi dané hermitovské formy.

4.3 Kvadratické formy

Definice 4.16. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Mějme zobrazení $Q\colon V \to \mathbb{R}$. Říkáme, že Q je **kvadratickou formou**,[27] pokud existuje hermitovská forma h, jejíž je Q diagonálou. Hermitovskou formu h pak nazýváme **polárou** kvadratické formy Q. Polární bází, nulprostorem a nulitou kvadratické formy Q rozumíme polární bázi, nulprostor a nulitu její poláry h. Dále Q považujeme za regulární, resp. singulární, pokud h je regulární, resp. singulární.

Poznámka 4.17. Podle polarizačních identit má každá kvadratická forma Q právě jednu poláru h.

Věta 4.18 (Zákon setrvačnosti kvadratických forem)**.** *Nechť Q je kvadratická forma na vektorovém prostoru V_n nad tělesem T a $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je polární báze Q. Označme p, q, r postupně počet kladných čísel, záporných čísel a nul v posloupnosti $(Q(\vec{a}_1), \dots, Q(\vec{a}_n))$. Pak (p, q, r) nezávisí na volbě polární báze.*

Důkaz. Podle důsledku 4.14 je r rovno nulitě, a nezávisí tudíž na volbě polární báze. Dokážeme-li, že ani p není závislé na volbě polární báze, bude důkaz hotový. Rozlišíme tři případy:

(a) Když $p = 0$, platí pro každé $j \in \hat{n}$, že $Q(\vec{a}_j) \leq 0$. Pro každé $\vec{x}$, kde $\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{a}_j$, pak máme:
$$Q(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 Q(\vec{a}_j) \leq 0,$$
proto i pro každý vektor $\vec{a}$ z jiné polární báze platí $Q(\vec{a}) \leq 0$.

[27] Kvadratická forma se velmi často značí také q.

(b) Je-li $p = n$, platí pro každé $j \in \hat{n}$, že $Q(\vec{a}_j) > 0$. Pro každé $\vec{x} \neq \vec{0}$, kde $\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{a}_j$ (některý z koeficientů α_j je jistě nenulový), potom máme:

$$Q(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 Q(\vec{a}_j) > 0,$$

proto i pro každý vektor $\vec{a}$ z jiné polární báze platí $Q(\vec{a}) > 0$.

(c) Když $0 < p < n$, předpokládejme BÚNO, že vektory polární báze $\mathcal{A}$ jsou seřazeny následovně:

$$Q(\vec{a}_j) > 0 \quad \text{pro } j \leq p \quad \text{a} \quad Q(\vec{a}_j) \leq 0 \quad \text{pro } j > p.$$

Označme $P = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p]_\lambda$. Pak pro každý nenulový vektor $\vec{x} \in P$ platí, že $\vec{x} = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \vec{a}_j$, přičemž alespoň jedno $\alpha_j \neq 0$. Proto $Q(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{p} |\alpha_j|^2 Q(\vec{a}_j) > 0$.

Vezměme jinou polární bázi $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ a opět ji uspořádejme tak, že

$$Q(\vec{b}_j) > 0 \quad \text{pro } j \leq \tilde{p} \quad \text{a} \quad Q(\vec{b}_j) \leq 0 \quad \text{pro } j > \tilde{p}.$$

Lze nahlédnout, že opět platí $0 < \tilde{p} < n$. Označme $Q = [\vec{b}_{\tilde{p}+1}, \dots, \vec{b}_n]_\lambda$. Pak podobným argumentem jako prve dostáváme, že $Q(\vec{x}) \leq 0$ pro každý vektor $\vec{x} \in Q$.

Jelikož $P \cap Q = \{\vec{0}\}$, plyne z první věty o dimenzi:

$$p + (n - \tilde{p}) = \dim P + \dim Q = \dim(P + Q) \leq \dim V_n = n.$$

Máme proto nerovnost $p \leq \tilde{p}$. Opačnou nerovnost dostaneme záměnou rolí bází $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ v předchozím postupu.

Počet bazických vektorů s kladnou hodnotou kvadratické formy tudíž nezávisí na volbě polární báze. □

Definice 4.19. Čísla p, resp. q z věty 4.18 nazýváme **kladným**, resp. **záporným indexem setrvačnosti**. **Signaturou** Q nazýváme trojici $\mathrm{sg}(Q) := (p, q, r)$ a **hodností** Q rozumíme číslo $h(Q) := p + q$. [28]

Definice 4.20. Nechť Q je kvadratická forma na vektorovém prostoru V nad T. Říkáme, že Q má **charakter** (zkráceně Q je):

1. **pozitivně definitní** (PD), pokud pro každé nenulové $\vec{x} \in V$ platí, že $Q(\vec{x}) > 0$,

2. **pozitivně semidefinitní** (PSD), když pro každé $\vec{x} \in V$ platí, že $Q(\vec{x}) \geq 0$, a existuje nenulové $\vec{x}_0 \in V$ takové, že $Q(\vec{x}_0) = 0$,

3. **negativně definitní** (ND), pokud pro každé nenulové $\vec{x} \in V$ platí, že $Q(\vec{x}) < 0$,

[28] Místo (p, q, r) se rovněž setkáme se značením (p, q, n), (p, n, d) nebo (n_+, n_-, n_0).

4. **negativně semidefinitní** (NSD), když pro každé $\vec{x} \in V$ platí, že $Q(\vec{x}) \leq 0$, a existuje nenulové $\vec{x}_0 \in V$ takové, že $Q(\vec{x}_0) = 0$,

5. **indefinitní**, pokud existují $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V$ taková, že $Q(\vec{x}_1) > 0$ a $Q(\vec{x}_2) < 0$.

O charakteru [29] kvadratické formy lze na prostoru konečné dimenze rozhodnout podle signatury.

Věta 4.21 (Charakter a signatura)**.** *Nechť Q je kvadratická forma na vektorovém prostoru V_n nad tělesem T a $\operatorname{sg}(Q) = (p, q, r)$. Pak platí:*

1. *Q je PD, právě když $p = n$, $q = 0$, $r = 0$,*

2. *Q je PSD, právě když $q = 0$, $r \neq 0$,*

3. *Q je ND, právě když $q = n$, $p = 0$, $r = 0$,*

4. *Q je NSD, právě když $p = 0$, $r \neq 0$,*

5. *Q je indefinitní, právě když $p \neq 0$, $q \neq 0$.*

Důkaz. Ukážeme platnost prvních dvou bodů. Důkazy dalších bodů jsou analogické.

1. ($\Rightarrow$): Pokud Q je PD, pak pro každý vektor $\vec{a}$ z libovolné polární báze platí, že $Q(\vec{a}) > 0$, proto $p = n$, $q = 0 = r$.
($\Leftarrow$): Je-li $p = n$, $q = 0 = r$, pak pro libovolnou polární bázi $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ platí, že $Q(\vec{a}_j) > 0$ pro každé $j \in \hat{n}$. Uvažujme libovolné nenulové $\vec{x} \in V_n$ a $\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{a}_j$ (některý z koeficientů α_j je jistě nenulový), pak $Q(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 Q(\vec{a}_j) > 0$.

2. ($\Rightarrow$): Pokud Q je PSD, pak pro každý vektor $\vec{a}$ z libovolné polární báze platí, že $Q(\vec{a}) \geq 0$, proto $q = 0$. Kdyby bylo i $r = 0$, byla by Q podle prvního bodu PD, proto $r \neq 0$.
($\Leftarrow$): Je-li $r \neq 0$, pak v libovolné polární bázi $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ existuje vektor $\vec{a}_{i_0}$ tak, že $Q(\vec{a}_{i_0}) = 0$ (bazický vektor $\vec{a}_{i_0}$ je samozřejmě nenulový). Protože $q = 0$, platí, že $Q(\vec{a}_j) \geq 0$ pro každé $j \in \hat{n}$. Uvažujeme-li libovolný vektor $\vec{x} \in V_n$ a $\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{a}_j$, pak $Q(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 Q(\vec{a}_j) \geq 0$. $\square$

[29] Jak už to bývá, ani definice charakteru kvadratických forem není jednotná. Podle naší definice je nulová forma PSD i NSD, ale některé definice nulovou formu za PSD ani NSD nepovažují. Dále podle naší definice není PD forma zároveň PSD. Ovšem setkáme se i s definicí, kdy PD formy tvoří podmnožinu PSD a ND formy zase podmnožinu NSD.

4.4 Matice kvadratické formy

Definice 4.22. Nechť Q je kvadratická forma na vektorovém prostoru V_n nad tělesem T, h její polára a $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ báze V_n. Pak **maticí kvadratické formy** Q, resp. hermitovské formy h **v bázi** $\mathcal{X}$ nazveme matici ${}^{\mathcal{X}}Q$ definovanou $[{}^{\mathcal{X}}Q]_{ij} := h(\vec{x}_i, \vec{x}_j)$ pro každé $i, j \in \hat{n}$.

Věta 4.23 (Vlastnosti matice kvadratické formy)**.** *Nechť Q je kvadratická forma na vektorovém prostoru V_n nad tělesem T, h její polára a $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ báze V_n. Pak platí:*

1. ${}^{\mathcal{X}}Q = ({}^{\mathcal{X}}Q)^H$.
2. $h(\vec{x}, \vec{y}) = ((\vec{x})_{\mathcal{X}})^T\, {}^{\mathcal{X}}Q\overline{(\vec{y})_{\mathcal{X}}}$ *pro každé* $\vec{x}, \vec{y} \in V_n$.
3. $Q(\vec{x}) = ((\vec{x})_{\mathcal{X}})^T\, {}^{\mathcal{X}}Q\overline{(\vec{x})_{\mathcal{X}}}$ *pro každé* $\vec{x} \in V_n$.
4. ${}^{\mathcal{Y}}Q = ({}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}})^T\, {}^{\mathcal{X}}Q\overline{({}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}})}$ *pro každou bázi* $\mathcal{Y}$ *prostoru* V_n.

Důkaz.

1. Připomeňme, že matice $\mathbb{A}^H$ se získá z $\mathbb{A}$ komplexním sdružením prvků a transponováním. Tvrzení plyne z hermitovskosti poláry h:
$$[{}^{\mathcal{X}}Q]_{ij} = h(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \overline{h(\vec{x}_j, \vec{x}_i)} = [({}^{\mathcal{X}}Q)^H]_{ij}.$$
2. Nechť $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$ a $\vec{y} = \sum_{j=1}^n \beta_j \vec{x}_j$. Pak díky linearitě h v prvním a antilinearitě ve druhém argumentu a posléze z definice maticového násobení dostáváme:
$$h(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n \overline{\beta_j} h(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = (\alpha_1 \dots \alpha_n)\, {}^{\mathcal{X}}Q \begin{pmatrix} \overline{\beta_1} \\ \vdots \\ \overline{\beta_n} \end{pmatrix} = ((\vec{x})_{\mathcal{X}})^T\, {}^{\mathcal{X}}Q\overline{(\vec{y})_{\mathcal{X}}}.$$
3. Tvrzení získáme z předchozího bodu dosazením $\vec{y} = \vec{x}$.
4. Označme $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)$. Pak z definice maticového násobení a z druhého bodu plyne:
$$[({}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}})^T\, {}^{\mathcal{X}}Q\overline{({}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}})}]_{ij} = ((\vec{y}_i)_{\mathcal{X}})^T\, {}^{\mathcal{X}}Q\overline{(\vec{y}_j)_{\mathcal{X}}} = h(\vec{y}_i, \vec{y}_j) = [{}^{\mathcal{Y}}Q]_{ij}.$$ □

Pozorování 4.24. *Pomocí 4. bodu věty 4.23 lze hledat polární bázi ještě jiným způsobem než úpravou na čtverce. Nechť Q je kvadratická forma v reálném prostoru V_n, $\mathcal{X}$ je báze V_n a $\mathcal{A}$ je polární báze Q. Ze vztahu ${}^{\mathcal{A}}Q = ({}^{\mathcal{A}}I^{\mathcal{X}})^T\, {}^{\mathcal{X}}Q\, {}^{\mathcal{A}}I^{\mathcal{X}}$, je vidět, že pokud diagonalizujeme ${}^{\mathcal{X}}Q$ současnými řádkovými a sloupcovými úpravami, tj. $\mathbb{D} = \mathbb{M}\,{}^{\mathcal{X}}Q\mathbb{M}^T$ (viz kapitola 1.2), pak matice sloupcových úprav $\mathbb{M}^T = {}^{\mathcal{A}}I^{\mathcal{X}}$ a získaná diagonální matice $\mathbb{D} = {}^{\mathcal{A}}Q$. Ze sloupců matice ${}^{\mathcal{A}}I^{\mathcal{X}}$ tudíž získáme polární bázi.*

Příklad 4.25. Nechť Q je kvadratická forma v $\mathbb{R}^3$ a ${}^{\mathcal{E}}Q = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \overset{\text{ř.}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \overset{\text{s.}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \overset{\text{ř.}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{41}{8} \end{pmatrix} \overset{\text{s.}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{41}{8} \end{pmatrix}.$$

Provedli jsme úpravy: přičtení trojnásobku prvního řádku/sloupce k druhému a přičtení $\frac{1}{8}$–násobku druhého řádku/sloupce ke třetímu. Matice sloupcových úprav vzniká z jednotkové stejnými sloupcovými úpravami ve stejném pořadí:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{s.}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{s.}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = {}^{\mathcal{A}}I^{\mathcal{E}}.$$

Našli jsme tedy polární bázi $\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Věta 4.26 (Hodnost kvadratické formy a její matice)**.** *Nechť Q je kvadratická forma na vektorovém prostoru V_n nad tělesem T a $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je báze V_n. Pak $h(Q) = h({}^{\mathcal{X}}Q)$.*

Důkaz. Podle čtvrtého bodu věty 4.23 nezáleží $h({}^{\mathcal{X}}Q)$ na volbě báze $\mathcal{X}$ prostoru V_n, matice přechodu jsou totiž regulární (tedy i matice k nim transponované, resp. komplexně sdružené jsou regulární) a násobení regulární maticí nemění hodnost. Zvolme tedy za $\mathcal{X}$ polární bázi. Pak je ovšem matice ${}^{\mathcal{X}}Q$ diagonální, na diagonále se nachází posloupnost čísel $(Q(\vec{x}_1), \dots, Q(\vec{x}_n))$ a počet nenulových čísel v ní je roven právě $p + q$. Dostáváme tedy $h({}^{\mathcal{X}}Q) = p + q = h(Q)$. □

Poznámka 4.27. V této poznámce shrneme, jak vypadají všechny hermitovské formy na prostorech konečné dimenze.

(a) Čtenář si ověří, že je-li $\mathcal{X}$ báze V_n nad tělesem $\mathbb{C}$ a $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ splňuje $\mathbb{A} = \mathbb{A}^H$ (říkáme, že $\mathbb{A}$ je **hermitovskou maticí**), pak $h(\vec{x}, \vec{y}) = ((\vec{x})_{\mathcal{X}})^T \mathbb{A} \overline{(\vec{y})_{\mathcal{X}}}$ je hermitovská forma. Na druhou stranu pro každou hermitovskou formu ve V_n nad $\mathbb{C}$ platí:

$$h(\vec{x}, \vec{y}) = ((\vec{x})_{\mathcal{X}})^T \, {}^{\mathcal{X}}Q \overline{(\vec{y})_{\mathcal{X}}},$$

kde ${}^{\mathcal{X}}Q$ je podle věty 4.23 hermitovská matice.

(b) Podobně čtenář ukáže, že je-li $\mathcal{X}$ báze V_n nad tělesem $\mathbb{R}$ a $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ splňuje $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$ (říkáme, že $\mathbb{A}$ je **symetrickou maticí**), pak $h(\vec{x}, \vec{y}) = ((\vec{x})_{\mathcal{X}})^T \mathbb{A} (\vec{y})_{\mathcal{X}}$ je hermitovská forma. Na druhou stranu pro každou hermitovskou formu ve V_n nad $\mathbb{R}$ platí:

$$h(\vec{x}, \vec{y}) = ((\vec{x})_{\mathcal{X}})^T \, {}^{\mathcal{X}}Q \, (\vec{y})_{\mathcal{X}},$$

kde ${}^{\mathcal{X}}Q$ je podle věty 4.23 hermitovská a reálná, tedy symetrická matice.

Poznámka 4.28. Speciálně na prostoru T^n jsou všechny hermitovské formy následujícího tvaru:

(a) Je-li $T = \mathbb{C}$, platí $h(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x})^T \mathbb{A}\overline{(\vec{y})}$, kde $\mathbb{A} = {}^{\mathcal{E}}Q$. Jde proto o hermitovskou matici.

(b) Je-li $T = \mathbb{R}$, platí $h(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x})^T \mathbb{A}\vec{y}$, kde $\mathbb{A} = {}^{\mathcal{E}}Q$. Matice $\mathbb{A}$ je tedy symetrická.

Úkol 4.29. ** Nechť Q je kvadratická forma v $\mathbb{R}^3$. Za jaké podmínky lze $\vec{x} \in \mathbb{R}^3, \vec{x} \neq \vec{0}$, doplnit na polární bázi Q? Za jaké podmínky lze LN vektory $\vec{x}, \vec{y}$ z $\mathbb{R}^3$ doplnit na polární bázi Q?

Úkol 4.30. * Nechť V_n je vektorový prostor nad tělesem T. Uvažujme P množinu všech hermitovských forem na V_n. Definujme operace $\oplus$ a $\odot$ bodově, tj. pro každé dvě hermitovské formy h_1, h_2, pro každé dva vektory $\vec{x}, \vec{y} \in V_n$ a pro každé $\alpha \in T$ platí:

$$(h_1 \oplus h_2)(\vec{x}, \vec{y}) = h_1(\vec{x}, \vec{y}) + h_2(\vec{x}, \vec{y}) \quad \text{a} \quad (\alpha \odot h_1)(\vec{x}, \vec{y}) = \alpha \cdot h_1(\vec{x}, \vec{y}).$$

Rozhodněte, zda P je vektorový prostor nad tělesem T. Pokud ano, určete dimenzi a najděte bázi P. (Nápověda: Odpověď bude záviset na tom, zda $T = \mathbb{C}$ nebo $T = \mathbb{R}$.)

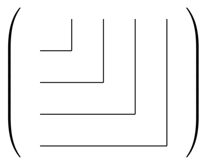
Úkol 4.31. Během studia se setkáte i s jinou definicí hermitovské formy, která vyžaduje její antilinearitu v prvním a linearitu ve druhém argumentu. Zejména se hermitovské formy (a hlavně pak skalární součin) takto zavádí v matematické fyzice. Rozmyslete si, jak se při takové definici změní tvrzení kapitoly Hermitovské formy. Některá z nich se zjednoduší. Například při značení z věty 4.23 bude platit:

- $h(\vec{x}, \vec{y}) = ((\vec{x})_{\mathcal{X}})^H \, {}^{\mathcal{X}}Q (\vec{y})_{\mathcal{X}}$ pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V_n$,
- $Q(\vec{x}) = ((\vec{x})_{\mathcal{X}})^H \, {}^{\mathcal{X}}Q (\vec{x})_{\mathcal{X}}$ pro každé $\vec{x} \in V_n$,
- ${}^{\mathcal{Y}}Q = ({}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}})^H \, {}^{\mathcal{X}}Q ({}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}})$ pro každou bázi $\mathcal{Y}$ prostoru V_n.

Přesto jsme se přidrželi zvyku, který u nás na fakultě mírně převládá, a definovali hermitovskou formu lineární v prvním a antilineární ve druhém argumentu.

4.5 Sylvesterovo kritérium pro kvadratické formy

Sylvesterovo kritérium [30] umožňuje rozhodnout o PD, resp. ND kvadratické formy pomocí výpočtu hlavních subdeterminantů její matice v libovolné bázi (ilustrace hlavních subdeterminantů viz obrázek 4). Mezi PSD, NSD a indefinitností ovšem rozlišit neumí. Silnější kritérium, které na základě vlastních čísel matice kvadratické formy rozhodne o jejím charakteru, si představíme později v kapitole Spektrální kritérium pro kvadratické formy.



Obrázek 4: Hlavní subdeterminanty.

Ukažme nejprve v prostoru $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$, do jakého tvaru lze každou kvadratickou formu převést.

Nechť Q je kvadratická forma v $\mathbb{R}^2$, označme $\Delta_1 = \mathbb{A}_{11}$ a $\Delta_2 = \det \mathbb{A}$ hlavní subdeterminanty matice $\mathbb{A} = {}^{\mathcal{E}}Q$. Nechť platí, že $\Delta_1 \neq 0$. Potom pomocí Lagrangeovy metody dostaneme:

$$\begin{aligned} Q(\vec{x}) &= \mathbb{A}_{11}x_1^2 + 2\mathbb{A}_{12}x_1x_2 + \mathbb{A}_{22}x_2^2 \\ &= \mathbb{A}_{11}\Big(x_1 + \tfrac{\mathbb{A}_{12}}{\mathbb{A}_{11}}x_2\Big)^2 - \tfrac{\mathbb{A}_{12}^2}{\mathbb{A}_{11}}x_2^2 + \mathbb{A}_{22}x_2^2 \\ &= \mathbb{A}_{11}\left(x_1 + \tfrac{\mathbb{A}_{12}}{\mathbb{A}_{11}}x_2\right)^2 + \tfrac{\mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{22}-\mathbb{A}_{12}^2}{\mathbb{A}_{11}}x_2^2 \\ &= \Delta_1\alpha_1^2 + \tfrac{\Delta_2}{\Delta_1}\alpha_2^2. \end{aligned}$$

Tedy existuje polární báze $\mathcal{A}$, v níž má matice kvadratické formy tvar ${}^{\mathcal{A}}Q = \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \end{pmatrix}$.

Nechť Q je kvadratická forma na $\mathbb{R}^3$, označme $\Delta_1 = \mathbb{A}_{11}, \Delta_2 = \mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{22}-\mathbb{A}_{12}^2, \Delta_3 = \det \mathbb{A}$ hlavní subdeterminanty matice $\mathbb{A} = {}^{\mathcal{E}}Q$. Nechť je splněno, že $\Delta_1 \neq 0$ a $\Delta_2 \neq 0$. Potom pomocí Lagrangeovy metody upravíme $Q(\vec{x})$ následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} Q(\vec{x}) &= \mathbb{A}_{11}x_1^2 + 2\mathbb{A}_{12}x_1x_2 + 2\mathbb{A}_{13}x_1x_3 + \mathbb{A}_{22}x_2^2 + 2\mathbb{A}_{23}x_2x_3 + \mathbb{A}_{33}x_3^2 \\ &= \mathbb{A}_{11}\Big(x_1 + \tfrac{\mathbb{A}_{12}}{\mathbb{A}_{11}}x_2 + \tfrac{\mathbb{A}_{13}}{\mathbb{A}_{11}}x_3\Big)^2 + \Big(\mathbb{A}_{22} - \tfrac{\mathbb{A}_{12}^2}{\mathbb{A}_{11}}\Big)x_2^2 + 2\left(\mathbb{A}_{23} - \tfrac{\mathbb{A}_{12}\mathbb{A}_{13}}{\mathbb{A}_{11}}\right)x_2x_3 + \Big(\mathbb{A}_{33} - \tfrac{\mathbb{A}_{13}^2}{\mathbb{A}_{11}}\Big)x_3^2 \\ &= \Delta_1\alpha_1^2 + \tfrac{\Delta_2}{\Delta_1}x_2^2 + 2\left(\tfrac{\mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{23}-\mathbb{A}_{12}\mathbb{A}_{13}}{\Delta_1}\right)x_2x_3 + \left(\tfrac{\mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{33}-\mathbb{A}_{13}^2}{\Delta_1}\right)x_3^2 \\ &= \Delta_1\alpha_1^2 + \tfrac{\Delta_2}{\Delta_1}\left(x_2 + \tfrac{\mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{23}-\mathbb{A}_{12}\mathbb{A}_{13}}{\Delta_2}x_3\right)^2 + \left(\tfrac{\mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{33}-\mathbb{A}_{13}^2}{\Delta_1} - \tfrac{(\mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{23}-\mathbb{A}_{12}\mathbb{A}_{13})^2}{\Delta_1\Delta_2}\right)x_3^2 \\ &= \Delta_1\alpha_1^2 + \tfrac{\Delta_2}{\Delta_1}\alpha_2^2 + \tfrac{\Delta_3}{\Delta_2}x_3^2 \\ &= \Delta_1\alpha_1^2 + \tfrac{\Delta_2}{\Delta_1}\alpha_2^2 + \tfrac{\Delta_3}{\Delta_2}\alpha_3^2. \end{aligned}$$

[30] James Joseph Sylvester (1814–1897), anglický matematik

Tudíž existuje polární báze $\mathcal{A}$, pro kterou platí, že ${}^{\mathcal{A}}Q = \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta_2}{\Delta_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta_3}{\Delta_2} \end{pmatrix}$.

Předchozí úpravy se dají provést pro libovolnou kvadratickou formu. Dostáváme tak následující lemma.

Lemma 4.32. *Nechť Q je kvadratická forma na vektorovém prostoru V_n nad tělesem T a $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ báze V_n. Nechť matice ${}^{\mathcal{X}}Q$ má všechny* ***hlavní subdeterminanty*** *řádu maximálně $n-1$ nenulové, tj. pro každé $k < n$ je splněno:*

$$\Delta_k := \det {}^{\mathcal{X}}Q \begin{pmatrix} 1, & 2, & ..., & k \\ 1, & 2, & ..., & k \end{pmatrix} \neq 0.$$

Potom existuje polární báze $\mathcal{A}$ kvadratické formy Q taková, že platí:

$${}^{\mathcal{A}}Q = \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{\Delta_2}{\Delta_1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Definujme soubor $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ vztahy:

$$\vec{a}_k = \sum_{j=1}^{k} \overline{\alpha_j^{(k)}} \vec{x}_j,$$

kde pro každé $k \in \hat{n}$ čísla $\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, \ldots, \alpha_k^{(k)}$ řeší soustavu LAR:

$${}^{\mathcal{X}}Q \begin{pmatrix} 1, & 2, & ..., & k \\ 1, & 2, & ..., & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^{(k)} \\ \alpha_2^{(k)} \\ \vdots \\ \alpha_k^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}} \end{pmatrix},$$

přičemž klademe $\Delta_0 = 1$. V případě $\Delta_n = 0$ navíc požadujeme, aby $\alpha_n^{(n)} = 1$. Ukážeme, že jde o hledanou polární bázi.

- Soubor $\mathcal{A}$ je LN:
  Případ $n = 1$ je triviální. Uvažujme $n > 1$. Jistě platí, že $\alpha_1^{(1)} = 1$, a pro každé $k \in \{2, \ldots, n-1\}$ plyne z Cramerova pravidla, že $\alpha_k^{(k)} = 1$. (Při výpočtu determinantu v čitateli použijeme rozvoj podle posledního sloupce.) Pokud $\Delta_n \neq 0$, potom rovnost $\alpha_n^{(n)} = 1$ plyne také z Cramerova pravidla. Jestliže $\Delta_n = 0$, pak z nenulovosti Δ_{n-1} plyne, že n-tý sloupec matice ${}^{\mathcal{X}}Q$ je po úpravě na horní stupňovitý tvar vedlejší, a lze tudíž volit neznámou $\alpha_n^{(n)}$ libovolně, tudíž také $\alpha_n^{(n)} = 1$. Celkově tudíž platí, že $\alpha_k^{(k)} = 1$ pro každé $k \in \hat{n}$. Z definice $\vec{a}_k$ a z lineární nezávislosti $\mathcal{X}$ je pak jasná i lineární nezávislost $\mathcal{A}$.

- Báze $\mathcal{A}$ je polární:
  Nechť $j \leq k$ a h je polára Q, pak platí:

$$h(\vec{a}_k, \vec{a}_j) = h\left(\vec{a}_k, \sum_{i=1}^{j} \overline{\alpha_i^{(j)}}\vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{j} \alpha_i^{(j)} h(\vec{a}_k, \vec{x}_i).$$

  Rozepišme $h(\vec{a}_k, \vec{x}_i)$ pro $i \leq k$:

$$\begin{aligned} h(\vec{a}_k, \vec{x}_i) &= h\left(\textstyle\sum_{\ell=1}^{k} \overline{\alpha_\ell^{(k)}}\vec{x}_\ell, \vec{x}_i\right) && \text{(definice } \mathcal{A}\text{)} \\ &= \textstyle\sum_{\ell=1}^{k} \overline{\alpha_\ell^{(k)}} h(\vec{x}_\ell, \vec{x}_i) && \text{(linearita } h \text{ v prvním argumentu)} \\ &= \textstyle\sum_{\ell=1}^{k} \overline{\alpha_\ell^{(k)}} [{}^{\mathcal{X}}Q]_{\ell i} && \text{(definice } {}^{\mathcal{X}}Q\text{)} \\ &= \textstyle\sum_{\ell=1}^{k} \overline{\alpha_\ell^{(k)}}\, \overline{[{}^{\mathcal{X}}Q]_{i\ell}} && \left({}^{\mathcal{X}}Q = ({}^{\mathcal{X}}Q)^H\right) \\ &= \overline{\textstyle\sum_{\ell=1}^{k} \alpha_\ell^{(k)} [{}^{\mathcal{X}}Q]_{i\ell}} && \text{(komplexní sdružování)} \\ &= \overline{\tfrac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}}\delta_{ik} && \text{(volba čísel } \alpha_\ell^{(k)} \text{ a maticové násobení).} \end{aligned}$$

  Celkově pak dostáváme:

$$h(\vec{a}_k, \vec{a}_j) = \sum_{i=1}^{j} \alpha_i^{(j)} \overline{\tfrac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}}\delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{pro } j < k, \\ \overline{\tfrac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}}\alpha_k^{(k)} = \overline{\tfrac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}} & \text{pro } j = k, \end{cases}$$

  tudíž $\mathcal{A}$ je polární báze.

- Tvar ${}^{\mathcal{A}}Q$:
  Z předchozího bodu plyne, že $Q(\vec{a}_1) = \overline{\Delta_1}$ a $Q(\vec{a}_k) = \overline{\frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}}$ pro $k \in \hat{n}$, $k \geq 2$. Jelikož kvadratická forma Q splňuje, že $Q(\vec{x}) \in \mathbb{R}$ pro každé $\vec{x} \in V_n$, platí také, že $Q(\vec{a}_1) = \Delta_1$ a $Q(\vec{a}_k) = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$ pro $k \geq 2$. □

Úkol 4.33. Ověřte sami navázáním na příklady ze začátku kapitoly, že pro kvadratické formy na $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ při postupu podle důkazu lemmatu 4.32 dostaneme stejnou polární bázi, jako když použijeme Lagrangeovu metodu.

Věta 4.34 (Sylvesterovo kritérium)**.** *Nechť Q je kvadratická forma na vektorovém prostoru V_n nad tělesem T a $\mathcal{X}$ je báze V_n. Pak platí:*

1. *Q je pozitivně definitní, právě když ${}^{\mathcal{X}}Q$ má všechny hlavní subdeterminanty kladné, tj. při zachování značení z lemmatu 4.32 je $\Delta_k > 0$ pro každé $k \in \hat{n}$.*

2. *Q je negativně definitní, právě když ${}^{\mathcal{X}}Q$ splňuje pro každé $k \in \hat{n}$:*

$$\begin{aligned} \Delta_k &> 0, \quad \text{je-li } k \text{ sudé}, \\ \Delta_k &< 0, \quad \text{je-li } k \text{ liché}. \end{aligned}$$

Důkaz. Vysvětlíme oba případy najednou.

- ($\Leftarrow$): Jde o důsledek lemmatu 4.32.
- ($\Rightarrow$): Pokud Q je PD, resp. ND, pak pro každé $k \in \hat{n}$ je kvadratická forma $Q^{(k)}$ definovaná pro každé $\vec{y} \in T^k$ jako

$$Q^{(k)}(\vec{y}) = (\vec{y})^T \ {}^{\mathcal{X}}Q \begin{pmatrix} 1, \ 2, \ ..., \ k \\ 1, \ 2, \ ..., \ k \end{pmatrix} \ \overline{(\vec{y})}$$

také PD, resp. ND. Platí totiž:

$$Q^{(k)}(\vec{y}) = (y_1 \ \dots \ y_k \ 0 \ \dots \ 0)^{\mathcal{X}}Q \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \vdots \\ \overline{y_k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = Q(\vec{x}), \text{ kde } (\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Odtud plyne, že ${}^{\mathcal{X}}Q \begin{pmatrix} 1, \ 2, \ ..., \ k \\ 1, \ 2, \ ..., \ k \end{pmatrix}$ je regulární matice, proto je jasné, že $\Delta_k \neq 0$ pro každé $k \in \hat{n}$. Tvrzení je pak opět přímým důsledkem lemmatu 4.32. $\square$

Příklad 4.35. Nechť Q je kvadratická forma na $\mathbb{R}^3$, která má ve standardní bázi tvar:

$$Q(\vec{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 2x_2x_3.$$

Rozhodněte, zda Q je PD.

Řešení: Stačí spočítat hlavní subdeterminanty matice ${}^{\mathcal{E}}Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dostáváme $\Delta_1 = 1, \Delta_2 = -3, \Delta_3 = -1$. Podle Sylvesterova kritéria není Q ani PD, ani ND. Vskutku, jde o indefinitní kvadratickou formu, protože pro vektory ze standardní báze je $Q(\vec{e}_1) = 1$ a $Q(\vec{e}_2) = -2$.

5 Skalární součin a ortogonalita

Motivace. Skalární součin nám umožňuje v „našem světě“ snadno počítat úhel mezi vektory, rozhodnout o kolmosti vektorů nebo určit velikost vektoru. Ovšem teorie skalárního součinu a ortogonality, se kterou se seznámíme, je daleko obecnější a bude stejně dobře fungovat i v abstraktních vektorových prostorech – prostorech posloupností, prostorech funkcí atd. Takové prostory budete více zkoumat ve funkcionální analýze. Hrají významnou roli v teorii parciálních diferenciálních rovnic, v kvantové mechanice, Fourierově analýze (matematický popis zpracování signálu) nebo v ergodické teorii (matematický základ termodynamiky).

5.1 Skalární součin

V celé kapitole si pod tělesem T představujeme pouze $\mathbb{C}$ nebo $\mathbb{R}$ (podobně jako pro hermitovské formy by všechna tvrzení platila i pro ostatní číselná tělesa, která jsou uzavřená na komplexní sdružování).

Definice 5.1. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Zobrazení $\langle . | . \rangle \colon V \times V \to T$ nazveme **skalárním součinem**, pokud $\langle . | . \rangle$ je hermitovská forma s pozitivně definitní diagonálou, [31] tj. platí následující tři axiomy skalárního součinu:

1. **hermitovskost**: $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \overline{\langle \vec{y} | \vec{x} \rangle}$ pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V$,
2. **linearita v prvním argumentu**: $\langle \alpha\vec{x} + \vec{y} | \vec{z} \rangle = \alpha \langle \vec{x} | \vec{z} \rangle + \langle \vec{y} | \vec{z} \rangle$ pro každé $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ a každé $\alpha \in T$,
3. **pozitivní definitnost**: $\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle \geq 0$ pro každé $\vec{x} \in V$ a $\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle = 0$, právě když $\vec{x} = \vec{0}$.

Normou [32] nazveme zobrazení $\|.\| : V \to T$ definované pro každé $\vec{x} \in V$ předpisem $\|\vec{x}\| := \sqrt{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle}$. Vektorový prostor V nad tělesem T se skalárním součinem $\langle . | . \rangle$ [33] značíme $\mathcal{H}$. (V prostoru $\mathcal{H}$ je tudíž definovaný jediný skalární součin.) Někdy mu říkáme **pre-Hilbertův prostor**. [34]

[31] Místo skalární součin se také říká vnitřní součin. A termín skalární součin se pak rezervuje pro standardní skalární součin v $\mathbb{R}^2$ či $\mathbb{R}^3$.

[32] Slovo norma má původ v latině, kde označovalo úhelník, nástroj používaný tesaři k určování pravého úhlu. Normě podle naší definice se také říká norma indukovaná skalárním součinem. Jak se dozvíte v topologii, axiomatická definice normy je obecnější a „naše“ norma je pouze jejím konkrétním příkladem.

[33] Existuje spousta symbolů pro skalární součin vektorů $\vec{x}$ a $\vec{y}$: $\vec{x} \cdot \vec{y}$, $(\vec{x}, \vec{y})$, $(\vec{x} | \vec{y})$, $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$, $g(\vec{x}, \vec{y})$, $\mathbf{b}(\vec{x}, \vec{y})$. My jsme se přiklonili ke špičatým závorkám, aby se značení nepletlo se symbolem pro soubor – pro ten máme vyhrazeny kulaté závorky.

[34] David Hilbert (1862–1943), německý matematik, byl jeden ze zakladatelů funkcionální analýzy. Tato disciplína se zabývá studiem Hilbertových prostorů (vektorové prostory se skalárním součinem, které jsou navíc úplné). Symbol $\mathcal{H}$ byl zaveden na počest Hilbertovi.

Věta 5.2 (Vlastnosti skalárního součinu)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}$ nad tělesem T. Pak pro každé $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{H}$ a každé $\alpha \in T$ platí:*

1. ***antilinearita ve druhém argumentu**: $\langle \vec{x} \,|\, \alpha\vec{y} + \vec{z} \rangle = \overline{\alpha} \langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x} \,|\, \vec{z} \rangle$,*

2. *$\|\vec{x}\| \geq 0$ a $\|\vec{x}\| = 0$, právě když $\vec{x} = \vec{0}$,*

3. *$\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha| \|\vec{x}\|$,*

4. ***rovnoběžníková rovnost**:*
$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2),$$

5. ***polarizační identity**:*
pro $T = \mathbb{R}$
$$\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = \frac{1}{4} \left(\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 \right),$$
pro $T = \mathbb{C}$
$$\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = \frac{1}{4} \left(\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 \right) + \frac{\mathrm{i}}{4} \left(\|\vec{x} + \mathrm{i}\vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \mathrm{i}\vec{y}\|^2 \right).$$

Důkaz. Jde o důsledky věty 4.3 a definice skalárního součinu a normy. □

Poznámka 5.3. Je-li $\mathcal{H}$ reálný vektorový prostor, pak je skalární součin **symetrický**, tedy $\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y} \,|\, \vec{x} \rangle$ pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}$, a **bilineární**, tj. lineární v obou argumentech.

Příklad 5.4. Nejtypičtějším příkladem prostorů se skalárním součinem jsou:

- nad tělesem $\mathbb{C}$
  unitární prostor $\mathbb{C}^n$, [35] na němž je definován **standardní skalární součin** pro každé dva vektory $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ a $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ jako
$$\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}.$$
  Norma vektoru je pak rovna:
$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k \overline{x_k}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}.$$

[35] Použití pojmu unitární prostor není jednotné. V literatuře tak často označuje libovolný komplexní pre-Hilbertův prostor, nebo se případně ještě připojí podmínka konečné dimenze.

- nad tělesem $\mathbb{R}$
  eukleidovský [36] **prostor** $\mathbb{R}^n$, [37] na němž je definován **standardní skalární součin** pro každé dva vektory $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ a $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ jako

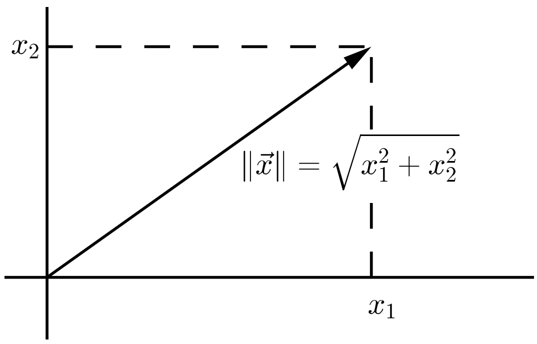
$$\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

  Norma vektoru je rovna:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

Čtenář sám ověří, že jsou splněny axiomy skalárního součinu.

Poznámka 5.5. Norma v eukleidovských prostorech $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ má význam velikosti vektoru. [38] Např. v $\mathbb{R}^2$ bychom velikost vektoru $\vec{x} = \binom{x_1}{x_2}$ počítali podle Pythagorovy věty jako $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, což je právě rovno $\|\vec{x}\|$, viz obrázek 5.



Obrázek 5: Norma vektoru v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^2$.

Poznámka 5.6. V eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^2$ vyjadřuje rovnoběžníková rovnost fakt, že součet čtverců délek všech stran v rovnoběžníku je roven součtu čtverců délek úhlopříček, viz obrázek 6.

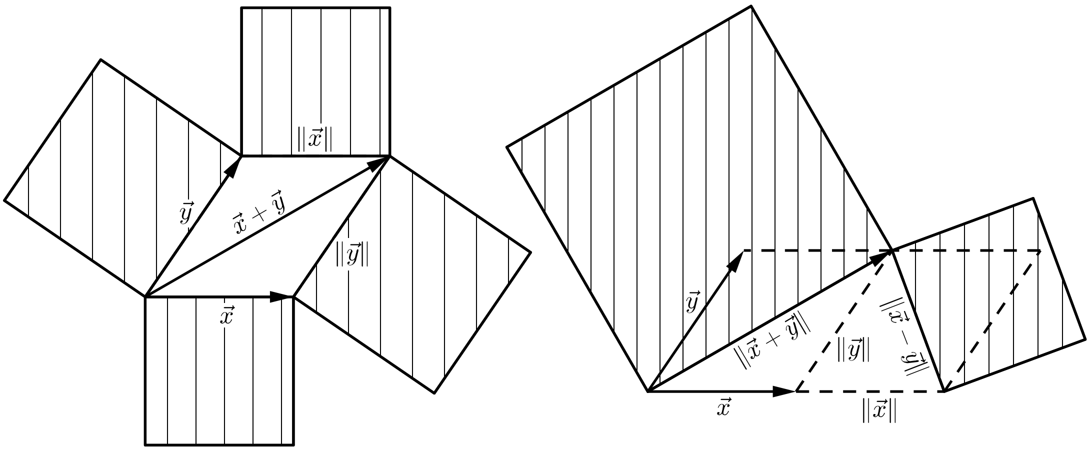
Definice 5.7. Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}$ nad $\mathbb{R}$ a $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}, \vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$. Pak **úhlem** mezi $\vec{x}$ a $\vec{y}$ nazveme číslo

$$\varphi := \arccos \frac{\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}.$$

[36] Eukleidés (325–260 př. n. l), řecký matematik a geometr

[37] Ke zdůraznění, že je prostor $\mathbb{R}^n$ vybaven standardním skalárním součinem, se používá značení E^n.

[38] Eukleidovský prostor $\mathbb{R}^3$ je nám nejbližší pre-Hilbertův prostor. Jde o ideální model „našeho světa“, kde řešíme geometrické úlohy a kde funguje klasická fyzika.



Obrázek 6: Rovnoběžníková rovnost.

Poznámka 5.8. Funkce arccos nabývá hodnot od 0 do π, proto $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$. Dále, jelikož je arccos definován na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$, je pro korektnost definice třeba, aby $-1 \leq \frac{\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|} \leq 1$. Platnost těchto nerovností vyplyne z Cauchyho–Schwarzovy nerovnosti, kterou uvedeme vzápětí ve větě 5.11.

Poznámka 5.9. Vyšetřeme, kdy je úhel nulový, ostrý, pravý, tupý, a kdy přímý.

- $\varphi = 0 \Leftrightarrow \langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$.
- φ je ostrý, tj. $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle > 0$ a $\varphi \neq 0$.
- φ je pravý, tj. $\varphi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = 0$.
- φ je tupý, tj. $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \Leftrightarrow \langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle < 0$ a $\varphi \neq \pi$.
- φ je přímý, tj. $\varphi = \pi \Leftrightarrow \langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = -\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$.

Poznámka 5.10. Ověříme, že definice úhlu odpovídá v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^2$ definici, kterou známe ze střední školy. Mějme dány vektory $\vec{x}, \vec{y}$. Pak z obrázku 7 vyčteme:

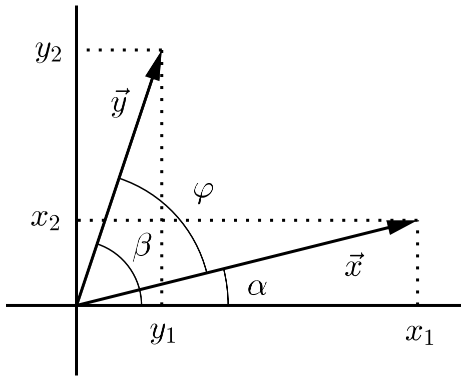
$$\cos\alpha = \frac{x_1}{\|\vec{x}\|},\ \sin\alpha = \frac{x_2}{\|\vec{x}\|},\ \cos\beta = \frac{y_1}{\|\vec{y}\|},\ \sin\beta = \frac{y_2}{\|\vec{y}\|}.$$

Přímo z definice kosinu a sinu lze ověřit platnost součtového vzorce:

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha.$$

Po dosazení vyjádření pro sinus a kosinus dostáváme:

$$\cos\varphi = \cos(\beta - \alpha) = \frac{y_1 x_1 + y_2 x_2}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|} = \frac{\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|}.$$



Obrázek 7: Úhel mezi vektory v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^2$.

Věta 5.11 (Cauchyho–Schwarzova nerovnost)**.** *Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}$. Pak platí:*

$$|\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|.$$

Rovnost nastává, právě když jsou vektory $\vec{x}, \vec{y}$ LZ.

Důkaz. Nejprve ověříme, že platí nerovnost. Poté se podíváme, kdy nastává rovnost.

(a) Pro $\vec{y} = \vec{0}$ nerovnost platí. Uvažujeme $\vec{y} \neq \vec{0}$. Pro libovolné $\alpha \in T$ máme:

$$0 \leq \langle \vec{x} - \alpha\vec{y} \,|\, \vec{x} - \alpha\vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|^2 - \alpha\langle \vec{y} \,|\, \vec{x} \rangle - \overline{\alpha}\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle + |\alpha|^2\|\vec{y}\|^2.$$

Položíme-li $\alpha = \frac{\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle}{\|\vec{y}\|^2}$, pak z předchozího vztahu dostáváme:

$$0 \leq \|\vec{x}\|^2 - \frac{\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle}{\|\vec{y}\|^2}\langle \vec{y} \,|\, \vec{x} \rangle - \frac{\langle \vec{y} \,|\, \vec{x} \rangle}{\|\vec{y}\|^2}\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle + \left| \frac{\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle}{\|\vec{y}\|^2} \right|^2 \|\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 - \frac{|\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle|^2}{\|\vec{y}\|^2}.$$

Odtud plyne nerovnost $|\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle|^2 \leq \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2$, tedy také $|\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$.

(b)
- ($\Rightarrow$): Nastává-li rovnost v Cauchyho–Schwarzově nerovnosti, potom z předchozí části důkazu plyne, že buď $\vec{y} = \vec{0}$, nebo $\vec{x} = \alpha\vec{y}$, kde $\alpha = \frac{\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle}{\|\vec{y}\|^2}$.
- ($\Leftarrow$): Jsou-li vektory $\vec{x}, \vec{y}$ LZ, pak buď $\vec{x} = \vec{0}$ a rovnost zřejmě platí, nebo $\vec{y} = \beta\vec{x}$ pro nějaké $\beta \in T$. Pak $|\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle| = |\langle \vec{x} \,|\, \beta\vec{x} \rangle| = |\beta|\|\vec{x}\|^2 = \|\beta\vec{x}\|\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|\|\vec{x}\|$. □

Poznámka 5.12. Podle definice úhlu a Cauchyho–Schwarzovy nerovnosti [39] vidíme, že vektory svírají nulový nebo přímý úhel, právě když jsou lineárně závislé. To opět odpovídá naší představě z eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^2$ či $\mathbb{R}^3$.

[39]Francouzský matematik Augustin Louis Cauchy [výslovnost „kóši“] (1789–1857) dokázal Cauchyho–Schwarzovu nerovnost v roce 1821 pro vektory z eukleidovského prostoru. Jeho student Viktor Jakovlevič Bunjakovskij (1804–1889) v roce 1859 ukázal, že nerovnost platí i v integrální formě, tedy v jistých Hilbertových prostorech nekonečné dimenze. Německý matematik Hermann Amandus Schwarz (1843–1921) pak tvrzení v plné obecnosti dokázal v roce 1885. Proto se někdy nerovnost v literatuře označuje i Cauchyho–Bunjakovského–Schwarzova.

Věta 5.13 (Trojúhelníková nerovnost)**.** *Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}$. Pak platí:*

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|.$$

Rovnost nastává, právě když existuje $\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \geq 0$, takové, že $\vec{x} = \alpha\vec{y}$ nebo $\vec{y} = \alpha\vec{x}$.

Důkaz. Nejprve ověříme, že platí nerovnost, a potom zjistíme, kdy nastává rovnost.

(a)

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 &= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle \\ &\leq \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2|\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle| \\ &\leq \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| \\ &= (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2, \end{aligned}$$

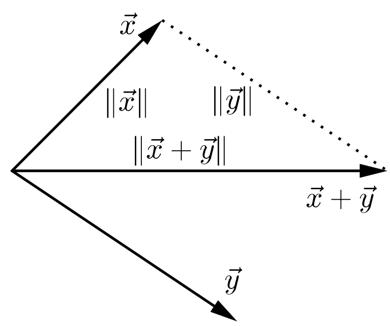
přičemž druhá nerovnost je Cauchyho–Schwarzova.

(b)

- ($\Rightarrow$): Nastává-li rovnost v trojúhelníkové nerovnosti, pak z předchozí části důkazu vyplývá, že nastává rovnost v Cauchyho–Schwarzově nerovnosti. Proto buď $\vec{x} = \vec{0}$ (pak $\vec{x} = 0\vec{y}$, neboli $\vec{x}$ je nezáporný násobek $\vec{y}$), nebo $\vec{x} \neq \vec{0}$ a $\vec{y} = \beta\vec{x}$ pro nějaké $\beta \in T$. Dále z předchozí části důkazu plyne, že platí $\mathrm{Re}\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = |\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle|$, odkud máme $\mathrm{Re}\langle \vec{x} \,|\, \beta\vec{x} \rangle = |\langle \vec{x} \,|\, \beta\vec{x} \rangle|$, tedy $\mathrm{Re}(\overline{\beta}\|\vec{x}\|^2) = |\overline{\beta}|\|\vec{x}\|^2$, tj. $\mathrm{Re}\overline{\beta} = |\overline{\beta}|$. To splní pouze $\beta \in \mathbb{R}$ a $\beta \geq 0$.
- ($\Leftarrow$): Platí-li $\vec{y} = \alpha\vec{x}$ pro nějaké $\alpha \geq 0$, pak s využitím vlastností normy dostáváme:

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\| &= \|\vec{x} + \alpha\vec{x}\| &&= \|(1+\alpha)\vec{x}\| \\ &= (1+\alpha)\|\vec{x}\| &&= \|\vec{x}\| + \alpha\|\vec{x}\| \\ &= \|\vec{x}\| + \|\alpha\vec{x}\| &&= \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|. \end{aligned}$$

Podobně dostaneme, že rovnost platí, je-li $\vec{x} = \alpha\vec{y}$ pro nějaké $\alpha \geq 0$. □



Obrázek 8: Trojúhelníková nerovnost.

Poznámka 5.14. V eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^2$ odpovídá trojúhelníková nerovnost známému faktu, že v trojúhelníku je součet délek dvou stran vždy větší než délka strany třetí, viz obrázek 8.

5.2 Ortogonalita

Definice 5.15. Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T.

1. Vektory $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}$ nazveme **kolmými (ortogonálními)**, [40] platí-li $\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = 0$. Značíme $\vec{x} \perp \vec{y}$.

2. Vektory $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ z $\mathcal{H}$ nazveme:

   (a) **ortogonálními (OG)**, pokud $\langle \vec{x}_i \,|\, \vec{x}_j \rangle = 0$ pro každé $i, j \in \hat{n}, i \neq j$,

   (b) **ortonormálními (ON)**, pokud $\langle \vec{x}_i \,|\, \vec{x}_j \rangle = \delta_{ij}$.

ON vektory jsou nutně nenulové, pro OG vektory to neplatí.

Poznámka 5.16. Pokud $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ jsou nenulové OG vektory, pak $\frac{1}{\|\vec{x}_1\|}\vec{x}_1, \ldots, \frac{1}{\|\vec{x}_n\|}\vec{x}_n$ jsou ON vektory.

Místo soubor OG, resp. ON vektorů budeme častěji říkat ortogonální, resp. ortonormální soubor.

Příklad 5.17. Nejjednodušším ON souborem v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^n$ a v unitárním prostoru $\mathbb{C}^n$ je standardní báze.

Věta 5.18 (Lineární nezávislost OG vektorů)**.** *Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ jsou nenulové OG vektory z $\mathcal{H}$. Potom $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ jsou LN.*

Důkaz. Nechť $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0}$. Provedeme skalární součin obou stran s vektorem $\vec{x}_j$ pro každé $j \in \hat{n}$:

$$\left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i \,\middle|\, \vec{x}_j \right\rangle = \langle \vec{0} \,|\, \vec{x}_j \rangle = 0.$$

Podle linearity skalárního součinu v prvním argumentu a ortogonality vektorů upravíme levou stranu rovnosti:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \langle \vec{x}_i \,|\, \vec{x}_j \rangle = \alpha_j \langle \vec{x}_j \,|\, \vec{x}_j \rangle = \alpha_j \|\vec{x}_j\|^2 = 0.$$

Jelikož $\vec{x}_j \neq \vec{0}$, dostáváme $\alpha_j = 0$ pro každé $j \in \hat{n}$, čímž je dokázána LN vektorů. □

Důsledek 5.19. *Jsou-li vektory ON, pak jsou LN.*

Věta 5.20 (Souřadnice v OG bázi)**.** *Nechť $\mathcal{H}_n$ je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je OG báze $\mathcal{H}_n$. Potom pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$ platí:*

$$x_i^{\#}(\vec{x}) = \frac{\langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_i \rangle}{\|\vec{x}_i\|^2}.$$

[40] Původ slova ortogonální je v řeckém orthos a gonia, přičemž druhé slovo znamená úhel, ale první slovo nejprve znamenalo přímý a až později se význam změnil na pravý.

Důkaz. Nechť $\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{x}_k$. Provedeme skalární součin obou stran s vektorem $\vec{x}_i$.

$$\langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_i \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{x}_k \,\middle|\, \vec{x}_i \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle \vec{x}_k \,|\, \vec{x}_i \rangle = \alpha_i \langle \vec{x}_i \,|\, \vec{x}_i \rangle,$$

kde jsme opět využili linearity skalárního součinu v prvním argumentu a ortogonality báze. Odtud dostáváme $\alpha_i = \frac{\langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_i \rangle}{\|\vec{x}_i\|^2}$ (dělíme nenulovým číslem, protože jde o bazické, tedy nenulové vektory). □

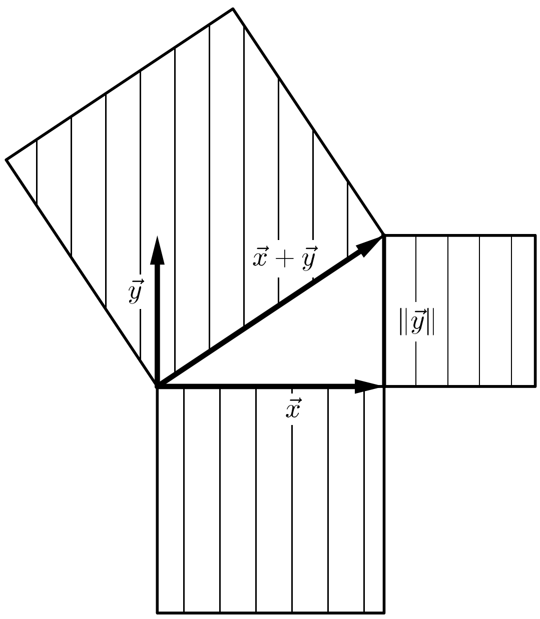
Důsledek 5.21 (Souřadnice v ON bázi)**.** *Nechť $\mathcal{H}_n$ je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je ON báze $\mathcal{H}_n$. Pak pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$ platí:*

$$x_i^{\#}(\vec{x}) = \langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_i \rangle.$$

Definice 5.22. Nechť $\mathcal{H}_n$ je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je ON báze $\mathcal{H}_n$. Pak souřadnice vektorů v bázi $\mathcal{X}$ nazýváme **Fourierovými koeficienty** v bázi $\mathcal{X}$. [41]

Věta 5.23 (Pythagorova)**.** *Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\vec{x}, \vec{y}$ jsou OG vektory z $\mathcal{H}$. Potom platí, že $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$.*

Důkaz. Je-li $\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = 0$, pak $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$. □



Obrázek 9: Pythagorova věta.

[41] Jean Baptiste Joseph Fourier [výslovnost „furié“] (1768–1830), francouzský matematik

Poznámka 5.24. V $\mathbb{R}^2$ odpovídá tvrzení „klasické“ Pythagorově větě, která říká, že součet obsahů čtverců nad odvěsnami v pravoúhlém trojúhelníku je roven obsahu čtverce nad přeponou. Viz obrázek 9.

Poznámka 5.25. Z důkazu je vidět, že v reálných prostorech platí i opačná implikace v Pythagorově větě. [42] V komplexních prostorech ale platit nemusí. Např. v unitárním prostoru $\mathbb{C}^2$ splňují vektory $\vec{x} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, že $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$, přesto $\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = \mathrm{i} \neq 0$.

Věta 5.26 (Gramova–Schmidtova)**.** *Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ jsou LN vektory v $\mathcal{H}$. Pak existují OG (i ON) vektory $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$ takové, že $[\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k]_\lambda = [\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k]_\lambda$ pro každé $k \in \widehat{n}$.*
Slovy: „LN vektory lze ortogonalizovat (i ortonormalizovat).“

Důkaz. Pomocí tzv. **Gramova–Schmidtova ortogonalizačního procesu** [43] vyrobíme nenulové OG vektory splňující podmínky věty. Na závěr každý z vektorů vynásobíme převrácenou hodnotou jeho normy. Tím se nezmění jejich lineární obal a podle poznámky 5.16 získáme ON vektory.

Položme $\vec{y}_1 = \vec{x}_1$. Pak je splněno $[\vec{x}_1]_\lambda = [\vec{y}_1]_\lambda$ a $\vec{y}_1$ je jistě OG. Předpokládejme, že jsou zkonstruovány OG vektory $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k$ splňující $[\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k]_\lambda = [\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k]_\lambda$ pro nějaké $1 \leq k < n$. Další vektor hledáme ve tvaru:

$$\vec{y}_{k+1} = \vec{x}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{y}_i.$$

Při takovém předpisu bude zřejmě platit, že $[\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k, \vec{x}_{k+1}]_\lambda = [\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k, \vec{y}_{k+1}]_\lambda$. Zbývá tedy najít koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tak, aby $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k, \vec{y}_{k+1}$ byly OG vektory. Koeficienty najdeme z podmínek $\langle \vec{y}_{k+1} \,|\, \vec{y}_j \rangle = 0$ pro každé $j \in \widehat{k}$. Dostáváme:

$$\langle \vec{y}_{k+1} \,|\, \vec{y}_j \rangle = 0 = \langle \vec{x}_{k+1} \,|\, \vec{y}_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \langle \vec{y}_i \,|\, \vec{y}_j \rangle = \langle \vec{x}_{k+1} \,|\, \vec{y}_j \rangle - \alpha_j \langle \vec{y}_j \,|\, \vec{y}_j \rangle,$$

kde jsme využili linearity skalárního součinu v prvním argumentu a ortogonality vektorů $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k$. Koeficienty α_j jsme našli, mají tvar $\alpha_j = \frac{\langle \vec{x}_{k+1} \,|\, \vec{y}_j \rangle}{\|\vec{y}_j\|^2}$. Dělíme jistě nenulovým číslem, neboť díky rovnosti $[\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k]_\lambda = [\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k]_\lambda$ a lineární nezávislosti vektorů $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ jsou vektory $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k$ také LN. □

Poznámka 5.27. Můžeme si tedy zapamatovat vzorec:

$$\vec{y}_{k+1} = \vec{x}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \vec{x}_{k+1} \,|\, \vec{y}_i \rangle}{\|\vec{y}_i\|^2} \vec{y}_i, \tag{5}$$

pomocí něhož lze vyrábět z LN vektorů OG vektory se stejným lineárním obalem.

[42] Pythagoras ze Samu (570–510 př. n. l.), legendární řecký filozof, matematik a astronom

[43] Gramův–Schmidtův ortogonalizační proces nese jméno po dánském (pojistném) matematikovi Jørgenu Pedersenu Gramovi (1850–1916) a německém matematikovi Erhardu Schmidtovi (1876–1959). Ovšem autorem metody byl již Laplace a algoritmus hojně využíval také Cauchy.

Důsledek 5.28 (Existence ON báze). *Každý vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem T, kde $n \in \mathbb{N}$, má ON bázi.*

Důkaz. Skalární součin je hermitovskou formou na prostoru $\mathcal{H}_n$. Existuje tudíž jeho polární báze, což je jistě OG báze $\mathcal{H}_n$. Z ní pak vyrobíme ON bázi podle poznámky 5.16. □

Poznámka 5.29. K praktickému hledání ON báze prostorů konečné dimenze nám ovšem bude sloužit Gramův–Schmidtův ortogonalizační proces. Najdeme jakoukoliv bázi a tu ortonormalizujeme.

Poznámka 5.30. Z důkazu Gramovy–Schmidtovy věty je vidět, že pro ON vektory $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k$ v $\mathcal{H}$ a pro $\vec{x} \in \mathcal{H}$ platí, že vektor $\vec{x} - \sum_{j=1}^{k} \langle \vec{x} \,|\, \vec{y}_j \rangle \vec{y}_j$ je kolmý na $\vec{y}_i$ pro každé $i \in \widehat{k}$.

Věta 5.31 (Besselova nerovnost). *Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ jsou ON vektory v $\mathcal{H}$. Pak pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}$ platí:*

$$\sum_{i=1}^{k} |\langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_i \rangle|^2 \leq \|\vec{x}\|^2.$$

Důkaz. Rozepíšeme následující výraz podle vlastností skalárního součinu a využijeme poznámku 5.30:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\langle \vec{x} - \textstyle\sum_{i=1}^{k} \langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_i \rangle \vec{x}_i \;\middle|\; \vec{x} - \textstyle\sum_{j=1}^{k} \langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_j \rangle \vec{x}_j \right\rangle \\ &= \left\langle \vec{x} - \textstyle\sum_{i=1}^{k} \langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_i \rangle \vec{x}_i \;\middle|\; \vec{x} \right\rangle - \textstyle\sum_{j=1}^{k} \overline{\langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_j \rangle} \left\langle \vec{x} - \textstyle\sum_{i=1}^{k} \langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_i \rangle \vec{x}_i \;\middle|\; \vec{x}_j \right\rangle \\ &= \left\langle \vec{x} - \textstyle\sum_{i=1}^{k} \langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_i \rangle \vec{x}_i \;\middle|\; \vec{x} \right\rangle = \|\vec{x}\|^2 - \textstyle\sum_{i=1}^{k} |\langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_i \rangle|^2. \end{aligned}$$

□

Věta 5.32 (ON báze). *Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je ON soubor v $\mathcal{H}$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:*

1. *$\mathcal{X}$ je báze.*
2. *Pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}$ platí:*
$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_i \rangle \vec{x}_i.$$
3. *Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}$ platí:*
$$\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_i \rangle \overline{\langle \vec{y} \,|\, \vec{x}_i \rangle}.$$

4. *Pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}$ nastává* ***Parsevalova rovnost****:*

$$\|\vec{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_i \rangle|^2.$$

Důkaz. Stačí dokázat cyklus implikací.

- 1. $\Rightarrow$ 2.: Plyne z důsledku 5.21.
- 2. $\Rightarrow$ 3.: Stačí předchozí rovnost vynásobit skalárně vektorem $\vec{y}$ a využít vlastností skalárního součinu.
- 3. $\Rightarrow$ 4.: Dostaneme dosazením $\vec{y} = \vec{x}$.
- 4. $\Rightarrow$ 1.: $\mathcal{X}$ je LN. Jelikož pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}$ nastává rovnost v Besselově nerovnosti, vidíme okamžitě z důkazu věty 5.31, že každé $\vec{x}$ lze napsat jako $\sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_i \rangle \vec{x}_i$. Tudíž $\mathcal{X}$ je báze. $\square$

Poznámka 5.33. Parsevalova rovnost [44] je speciálním případem Besselovy nerovnosti. [45] Nastává pro každý vektor, právě když příslušný ON soubor tvoří bázi.

Úkol 5.34. Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T. **Gramovou maticí** [46] vektorů $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ z $\mathcal{H}$ rozumíme čtvercovou matici $\mathbb{G}$ řádu n definovanou pro každé $i, j \in \hat{n}$ jako $\mathbb{G}_{ij} = \langle \vec{x}_i \,|\, \vec{x}_j \rangle$. Její determinant nazýváme **gramiánem**. Dokažte, že vektory $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ jsou LN, právě když gramián je nenulový.

5.3 Ortogonální doplněk

Definice 5.35. Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $M \subset \mathcal{H}, M \neq \emptyset$. **Ortogonálním doplňkem** M do $\mathcal{H}$ nazveme množinu

$$M^{\perp} = \{\vec{x} \in \mathcal{H} \mid \langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = 0 \text{ pro každé } \vec{y} \in M\}.$$

Věta 5.36 (Vlastnosti OG doplňku)**.** *Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T a $M \subset \mathcal{H}, M \neq \emptyset$. Pak platí:*

1. *$M^{\perp} \subset\subset \mathcal{H}$.*
2. *$M \subset (M^{\perp})^{\perp}$.*

[44] Marc-Antoine Parseval des Chênes [výslovnost „parseval“] (1755–1836), francouzský matematik
[45] Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846), německý astronom, matematik a geodet
[46] Název matice nevyjadřuje její hmotnost, nýbrž odkazuje na matematika Grama, nám známého z Gramova–Schmidtova OG procesu.

Důkaz.

1. $M^\perp \neq \emptyset$, protože $\vec{0} \in M^\perp$. Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in M^\perp$ a $\alpha \in T$, pak pro každé $\vec{y} \in M$ platí $\langle \vec{x}_1 | \vec{y} \rangle = 0$ a $\langle \vec{x}_2 | \vec{y} \rangle = 0$. Odtud $\langle \alpha\vec{x}_1 + \vec{x}_2 | \vec{y} \rangle = \alpha\langle \vec{x}_1 | \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}_2 | \vec{y} \rangle = 0$, tedy $\alpha\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in M^\perp$.
2. Platnost inkluze plyne přímo z definice ortogonálního doplňku. □

Čtenáři jistě už vrtá hlavou, jestli je slovo doplněk dobře zvolené. To jest, zda OG doplněk podprostoru je také jeho doplňkem. Odpověď dává následující věta. [47]

Věta 5.37 (OG rozklad)**.** *Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $P \subset\subset \mathcal{H}$ a $\dim P < +\infty$. Pak platí:*

1. $\mathcal{H} = P \oplus P^\perp$.

2. $(P^\perp)^\perp = P$.

Důkaz.

1. Ošetříme dva případy.
   - Je-li $P = \{\vec{0}\}$, pak $P^\perp = \mathcal{H}$ a $\mathcal{H} = \{\vec{0}\} \oplus \mathcal{H}$.
   - Nechť $P \neq \{\vec{0}\}$, pak existuje ON báze P. Označme ji $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$. Pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}$ platí, že $\vec{x} - \sum_{i=1}^n \langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle \vec{x}_i$ je kolmý na $\vec{x}_j$ pro každé $j \in \hat{n}$ podle poznámky 5.30. Tudíž je kolmý i na všechny vektory z P. Odtud plyne, že
   $$\vec{x} - \sum_{i=1}^n \langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle \vec{x}_i \in P^\perp.$$
   Jelikož $\sum_{i=1}^n \langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle \vec{x}_i \in P$, je tím dokázáno, že $\mathcal{H} = P + P^\perp$. Direktnost součtu plyne z faktu, že $P \cap P^\perp$ obsahuje vektory kolmé na sebe sama, tedy $P \cap P^\perp = \{\vec{0}\}$.
2. Už víme, že $P \subset (P^\perp)^\perp$.
   $(P^\perp)^\perp \subset P$: Podle již dokázaného prvního bodu pro každé $\vec{x} \in (P^\perp)^\perp \subset \mathcal{H}$ existují $\vec{p} \in P$ a $\vec{q} \in P^\perp$ takové, že $\vec{x} = \vec{p} + \vec{q}$. Dokážeme-li, že $\vec{q} = \vec{0}$, pak bude jasné, že $\vec{x} \in P$. Provedeme skalární součin s vektorem $\vec{q}$ a dostaneme:
   $$\langle \vec{x} | \vec{q} \rangle = \langle \vec{p} | \vec{q} \rangle + \langle \vec{q} | \vec{q} \rangle.$$
   Z definice OG doplňku je zřejmé, že $\langle \vec{x} | \vec{q} \rangle = 0$ a zároveň $\langle \vec{p} | \vec{q} \rangle = 0$, proto $\langle \vec{q} | \vec{q} \rangle = 0$, tedy $\vec{q} = \vec{0}$. □

[47] Zvídavý čtenář se možná také ptá, zda je předpoklad konečné dimenze podprostoru P ve větě 5.37 nezbytný. V tuto chvíli ano, protože bychom obecnější znění s aktuálními znalostmi ještě neuměli dokázat. Ale jak ukáže funkcionální analýza, v Hilbertových prostorech bude tvrzení platit i pro podprostory nekonečné dimenze, pokud budou ovšem tzv. uzavřené.

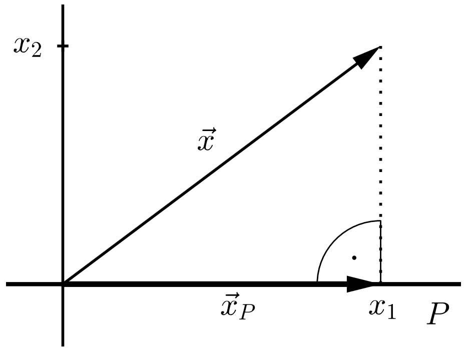
Definice 5.38. Nechť $P \subset\subset \mathcal{H}$ a nechť $\vec{x} \in \mathcal{H}$. Je-li $\vec{x} = \vec{x}_P + \vec{x}_{P^\perp}$, kde $\vec{x}_P \in P$ a $\vec{x}_{P^\perp} \in P^\perp$, pak vektor $\vec{x}_P$ se nazývá **ortogonálním průmětem** $\vec{x}$ do P.

Uvědomme si také souvislost s projektory: Zobrazení, které vektoru přiřazuje jeho OG průmět do P, je projektor na P podle $P^\perp$.

Poznámka 5.39. V důkazu prvního bodu věty 5.37 je uvedeno, jak lze OG průmět $\vec{x}$ do P konstruovat, známe-li ON bázi $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ prostoru P. Platí:

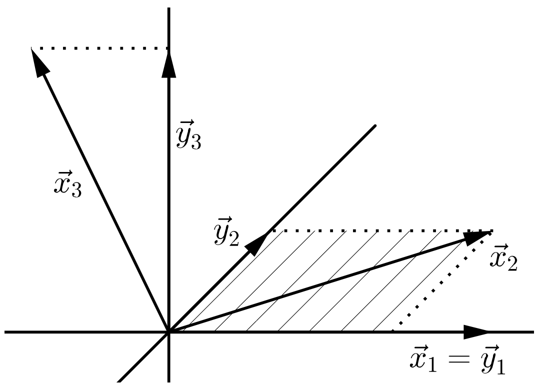
$$\vec{x}_P = \sum_{j=1}^{n} \langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_j \rangle \vec{x}_j. \tag{6}$$

V příkladech bude ovšem výhodnější konstruovat OG průměty jinými způsoby.



Obrázek 10: Ortogonální průmět vektoru na přímku.

Poznámka 5.40. V eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^2$ odpovídá průmět vektoru naší představě kolmého promítání. Např. pro podprostor $P = [\vec{e}_1]_\lambda$, tedy přímku odpovídající ose x, je OG průmět $\vec{x} = \binom{x_1}{x_2}$ podle poznámky 5.39 roven $\vec{x}_P = \langle \vec{x} \,|\, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 = x_1 \vec{e}_1$. Viz obrázek 10.



Obrázek 11: Ortogonalizace vektorů v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$.

Poznámka 5.41. Vraťme se ještě jednou ke Gramovu–Schmidtovu ortogonalizačnímu procesu a všimněme si, jak se dá proces popsat pomocí pojmu OG průmět.

Připomeňme, že úlohou je zkonstruovat k daným LN vektorům $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ OG vektory $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$ takové, že $[\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k]_\lambda = [\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k]_\lambda$ pro každé $k \in \widehat{n}$. Odvodili jsme vzorec (5) pro výpočet $\vec{y}_{k+1}$, máme-li zkonstruované $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k$:

$$\vec{y}_{k+1} = \vec{x}_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle \vec{x}_{k+1} \,|\, \vec{y}_j \rangle}{\|\vec{y}_j\|^2} \vec{y}_j = \vec{x}_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \left\langle \vec{x}_{k+1} \,\middle|\, \tfrac{1}{\|\vec{y}_j\|} \vec{y}_j \right\rangle \tfrac{1}{\|\vec{y}_j\|} \vec{y}_j .$$

Jelikož $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k$ jsou OG vektory, $\frac{1}{\|\vec{y}_1\|}\vec{y}_1, \ldots, \frac{1}{\|\vec{y}_k\|}\vec{y}_k$ jsou ON vektory. Můžeme proto psát $\vec{y}_{k+1} = \vec{x}_{k+1} - (\vec{x}_{k+1})_P$, přičemž $P = [\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k]_\lambda$. Neboli $\vec{y}_{k+1}$ získáme tak, že si z $\vec{x}_{k+1}$ necháme pouze část, která je kolmá na P, a patří tedy do $P^\perp$.

Na obrázku 11 je ilustrace Gramova–Schmidtova OG procesu, kterým ortogonalizujeme vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$.

6 Metrická geometrie

Jedná se o lineární geometrii ve vektorových prostorech se skalárním součinem. V takových prostorech budeme navíc umět měřit vzdálenosti a úhly.

V celé kapitole uvažujeme pouze $T = \mathbb{C}$ nebo $T = \mathbb{R}$, pracujeme totiž se skalárním součinem.

6.1 Vzdálenosti

Definice 6.1. Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}$ nad tělesem T a $M_1, M_2 \subset \mathcal{H}$, $M_1, M_2 \neq \emptyset$. Pak **vzdáleností** množin M_1 a M_2 nazveme číslo

$$\rho(M_1, M_2) := \inf\{\|\vec{x} - \vec{y}\| \mid \vec{x} \in M_1, \vec{y} \in M_2\}.$$

Poznámka 6.2. Díky neprázdnosti množin M_1 a M_2 je $\rho(M_1, M_2) \neq +\infty$ a díky nezápornosti normy je $\rho(M_1, M_2) \geq 0$. [48]

Příklad 6.3. I v případě, že $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, může být vzdálenost M_1 a M_2 nulová. Například v prostoru $\mathbb{R}^1$ indukuje standardní skalární součin normu $\|\vec{x}\| = \|(x_1)\| = |x_1|$. Čtenář si snadno rozmyslí, že pak vzdálenost otevřených intervalů $M_1 = (0, 1)$ a $M_2 = (1, 2)$ je rovna nule.

Popíšeme nyní několik případů, kdy lze vzdálenost počítat jednodušeji než přímo z definice.

Věta 6.4 (Vzdálenost bodu od podprostoru)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}$ nad tělesem T. Nechť $\vec{a} \in \mathcal{H}$, $P \subset\subset \mathcal{H}$ a $\dim P < +\infty$. Pak $\rho(\vec{a}, P) = \|\vec{a}_{P^\perp}\|$.*

Důkaz. Podle definice je $\rho(\vec{a}, P) = \inf\{\|\vec{a} - \vec{x}\| \mid \vec{x} \in P\}$. Ukažme nejprve, že $\rho(\vec{a}, P) \geq \|\vec{a}_{P^\perp}\|$. Konečnou dimenzi potřebujeme, abychom mohli použít větu 5.37 o OG rozkladu. Pro každé $\vec{x} \in P$ platí podle Pythagorovy věty:

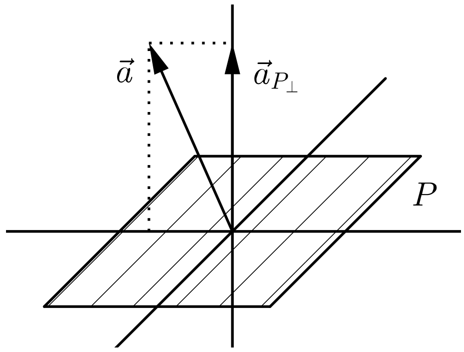
$$\|\vec{a} - \vec{x}\|^2 = \|\vec{a}_{P^\perp} + (\vec{a}_P - \vec{x})\|^2 = \|\vec{a}_{P^\perp}\|^2 + \|\vec{a}_P - \vec{x}\|^2 \geq \|\vec{a}_{P^\perp}\|^2.$$

Proto platí také nerovnost $\|\vec{a} - \vec{x}\| \geq \|\vec{a}_{P^\perp}\|$.

Při volbě $\vec{x} = \vec{a}_P$ dokonce nastává rovnost $\|\vec{a} - \vec{x}\| = \|\vec{a}_{P^\perp}\|$, proto je infimum rovno minimu, a to $\rho(\vec{a}, P) = \|\vec{a}_{P^\perp}\|$. □

Poznámka 6.5. V eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ (viz obrázek 12) odpovídá vzdálenost bodu od přímky či od roviny naší představě – z bodu se spustí kolmice na přímku či rovinu a její délka se změří.

[48] Vzdálenost množin M_1 a M_2 se značí někdy $d(M_1, M_2)$ podle anglického výrazu distance pro vzdálenost.



Obrázek 12: Vzdálenost bodu od podprostoru v $\mathbb{R}^3$.

Také vzdálenost dvou lineárních variet lze převést na vzdálenost bodu od podprostoru.

Věta 6.6 (Vzdálenost variet)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}$ nad tělesem T. Nechť W_1 a W_2 jsou lineární variety v $\mathcal{H}$ a nechť $\vec{a}_1 \in W_1$ a $\vec{a}_2 \in W_2$. Pak platí:*

$$\rho(W_1, W_2) = \rho(\vec{a}_1 - \vec{a}_2, \mathcal{Z}(W_1) + \mathcal{Z}(W_2)).$$

Důkaz. Jelikož $W_1 = \vec{a}_1 + \mathcal{Z}(W_1)$ a $W_2 = \vec{a}_2 + \mathcal{Z}(W_2)$, máme:

$$\rho(W_1, W_2) = \inf\{\|\vec{a}_1 + \vec{s}_1 - \vec{a}_2 - \vec{s}_2\| \mid \vec{s}_1 \in \mathcal{Z}(W_1), \vec{s}_2 \in \mathcal{Z}(W_2)\}.$$

Zřejmě platí také rovnost:

$$\{\|\vec{a}_1 + \vec{s}_1 - \vec{a}_2 - \vec{s}_2\| \mid \vec{s}_1 \in \mathcal{Z}(W_1), \vec{s}_2 \in \mathcal{Z}(W_2)\} = \{\|\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - \vec{s}\| \mid \vec{s} \in \mathcal{Z}(W_1) + \mathcal{Z}(W_2)\}.$$

Tím je důkaz hotov, neboť podle definice vzdálenosti množin platí:

$$\inf\{\|\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - \vec{s}\| \mid \vec{s} \in \mathcal{Z}(W_1) + \mathcal{Z}(W_2)\} = \rho(\vec{a}_1 - \vec{a}_2, \mathcal{Z}(W_1) + \mathcal{Z}(W_2)).$$

□

Poznámka 6.7. Speciálním případem věty 6.6 je vzdálenost bodu $\vec{b}$ od lineární variety $W = \vec{a} + \mathcal{Z}(W)$. Platí, že $\rho(\vec{b}, W) = \rho(\vec{b} - \vec{a}, \mathcal{Z}(W))$. Slovy: „Posunutí celé konfigurace o vektor $\vec{a}$, to jest tak, aby se posunutý podprostor vrátil do počátku, vzdálenost nemění.“

Pro zjednodušení výpočtu vzdálenosti bodu od nadroviny potřebujeme zavést pojem normálový [49] vektor. Při té příležitosti také popíšeme nadroviny a posléze všechny lineární variety v prostorech se skalárním součinem pomocí tzv. normálových rovnic.

6.2 Popis nadrovin

Definice 6.8. Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}$ nad tělesem T a nechť W je lineární varieta v $\mathcal{H}$. Pak každý nenulový vektor $\vec{n}_W \in \mathcal{Z}(W)^\perp$ nazveme **normálovým vektorem** variety W.

[49] Stejně jako norma pochází i slovo normálový z latiny. Normalis znamený vyrobený podle tesařského úhelníku nebo svírající pravý úhel.

Věta 6.9 (Nadrovina v $\mathcal{H}$)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}$ nad tělesem T, $\alpha \in T$ a $\vec{n} \in \mathcal{H}, \vec{n} \neq \vec{0}$. Pak $\{\vec{x} \in \mathcal{H} \mid \langle \vec{x} | \vec{n} \rangle = \alpha\}$ je nadrovina v $\mathcal{H}$.*

Důkaz. Definujme $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \vec{n} \rangle$ pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}$. Z linearity skalárního součinu v prvním argumentu vidíme, že $\varphi \in \mathcal{H}^{\#}$. Z nenulovosti $\vec{n}$ plyne, že $\varphi \neq \Theta$. A nenulový funkcionál opravdu definuje nadrovinu, jak víme ze zimního semestru. $\square$

Věta 6.10 (Varieta jako průnik nadrovin v $\mathcal{H}$)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}$ nad tělesem T, kde* $\dim \mathcal{H} < +\infty$, *a nechť W je lineární varieta v $\mathcal{H}$ a* $\operatorname{codim} W = k \in \mathbb{N}$. *Pak existují LN vektory $\vec{n}_1, \ldots, \vec{n}_k$ z $\mathcal{H}$ a čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in T$ tak, že*

$$W = \bigcap_{i=1}^{k} \{\vec{x} \in \mathcal{H} \mid \langle \vec{x} | \vec{n}_i \rangle = \alpha_i\}.$$

Důkaz. Jelikož jsou splněny předpoklady věty 5.37, platí $\mathcal{Z}(W) \oplus \mathcal{Z}(W)^{\perp} = \mathcal{H}$. Protože dále $\operatorname{codim} W = k$, plyne odtud, že $\dim \mathcal{Z}(W)^{\perp} = k$. Uvažujme libovolnou bázi $\mathcal{Z}(W)^{\perp}$ a označme ji $(\vec{n}_1, \ldots, \vec{n}_k)$. Vezměme dále $\vec{a} \in W$ a pro každé $i \in \hat{k}$ položme $\alpha_i = \langle \vec{a} | \vec{n}_i \rangle$. Ověřme, že $\vec{a} + \mathcal{Z}(W) = \bigcap_{i=1}^{k} \{\vec{x} \in \mathcal{H} \mid \langle \vec{x} | \vec{n}_i \rangle = \alpha_i\}$.

- Inkluze $\vec{a} + \mathcal{Z}(W) \subset \bigcap_{i=1}^{k} \{\vec{x} \in \mathcal{H} \mid \langle \vec{x} | \vec{n}_i \rangle = \alpha_i\}$ platí evidentně.
- $\bigcap_{i=1}^{k} \{\vec{x} \in \mathcal{H} \mid \langle \vec{x} | \vec{n}_i \rangle = \alpha_i\} \subset \vec{a} + \mathcal{Z}(W)$: Nechť $\vec{x} \in \mathcal{H}$ splňuje $\langle \vec{x} | \vec{n}_i \rangle = \alpha_i$ pro každé $i \in \hat{k}$, potom $\vec{x} - \vec{a}$ splňuje $\langle \vec{x} - \vec{a} | \vec{n}_i \rangle = 0$ pro každé $i \in \hat{k}$. Jelikož je vektor $\vec{x} - \vec{a}$ kolmý na všechny bazické vektory $\mathcal{Z}(W)^{\perp}$, je kolmý také na každý vektor ze $\mathcal{Z}(W)^{\perp}$. Z faktu, že $\left(\mathcal{Z}(W)^{\perp}\right)^{\perp} = \mathcal{Z}(W)$ již plyne, že $\vec{x} - \vec{a} \in \mathcal{Z}(W)$, tudíž $\vec{x} \in \vec{a} + \mathcal{Z}(W)$. $\square$

Definice 6.11. Rovnice $\langle \vec{x} | \vec{n}_i \rangle = \alpha_i$ pro každé $i \in \hat{k}$ z věty 6.10 rozepsané po souřadnicích nazýváme **normálovými rovnicemi** variety W v příslušné bázi.

Poznámka 6.12. Normálové rovnice jsou zároveň neparametrickými rovnicemi, které známe ze zimního semestru. (Platí totiž, že při daném vektoru $\vec{n} \neq \vec{0}$ je vztahem $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \vec{n} \rangle$ definován lineární funkcionál.) Později uvidíme, že na prostorech konečné dimenze se skalárním součinem jsou také jakékoliv neparametrické rovnice variety zároveň normálovými rovnicemi. (V kapitole Rieszova věta a sdružený operátor vyslovíme totiž Rieszovu větu, podle které lze každý lineární funkcionál φ psát ve tvaru $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \vec{n} \rangle$ pro nějaké $\vec{n} \neq \vec{0}$.)

Speciálně tedy platí, že normálové rovnice variety v dané bázi nejsou jednoznačně určené.

Příklad 6.13. Nechť je dána přímka $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_{\lambda}$ v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$. Najděte normálové rovnice W ve standardní bázi.

Řešení: Najdeme doplněk zaměření:

$$\mathcal{Z}(W)^\perp = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda .$$

Normálové rovnice získáme ze skalárních součinů:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Normálové rovnice jsou tudíž např. $y = 2$ a $x + z = 4$.

Nyní se můžeme vrátit k poslední vzdálenosti, kterou se naučíme počítat jednodušším způsobem.

Věta 6.14 (Vzdálenost bodu od nadroviny)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}$ nad tělesem T, kde* $\dim \mathcal{H} < +\infty$, *a W je nadrovina v $\mathcal{H}$ definovaná rovnicí $\langle \vec{x} \,|\, \vec{n}_W \rangle = \alpha$. Nechť $\vec{b} \in \mathcal{H}$. Pak platí:*

$$\rho(\vec{b}, W) = \frac{|\langle \vec{b} \,|\, \vec{n}_W \rangle - \alpha|}{\|\vec{n}_W\|}.$$

Důkaz. Nechť $\vec{a} \in W$. Pak s využitím poznámky 6.7 a věty 6.4 máme:

$$\rho(\vec{b}, W) = \rho(\vec{b} - \vec{a}, \mathcal{Z}(W)) = \|(\vec{b} - \vec{a})_{\mathcal{Z}(W)^\perp}\|.$$

Zdůrazněme, že $\vec{n}_W \neq \vec{0}$, jelikož W je nadrovina. Podle vzorce z poznámky 5.39 pro výpočet OG průmětu do $\mathcal{Z}(W)^\perp$ dostáváme při použití ON báze $\left(\frac{1}{\|\vec{n}_W\|}\vec{n}_W\right)$ vztah:

$$(\vec{b} - \vec{a})_{\mathcal{Z}(W)^\perp} = \left\langle \vec{b} - \vec{a} \,\middle|\, \frac{1}{\|\vec{n}_W\|}\vec{n}_W \right\rangle \frac{1}{\|\vec{n}_W\|}\vec{n}_W = \frac{\langle \vec{b} \,|\, \vec{n}_W \rangle - \langle \vec{a} \,|\, \vec{n}_W \rangle}{\|\vec{n}_W\|^2}\vec{n}_W = \frac{\langle \vec{b} \,|\, \vec{n}_W \rangle - \alpha}{\|\vec{n}_W\|^2}\vec{n}_W.$$

Norma OG průmětu je tudíž rovna:

$$\frac{|\langle \vec{b} \,|\, \vec{n}_W \rangle - \alpha|}{\|\vec{n}_W\|^2}\|\vec{n}_W\| = \frac{|\langle \vec{b} \,|\, \vec{n}_W \rangle - \alpha|}{\|\vec{n}_W\|}.$$ □

6.3 Úhly

Už známe úhly mezi vektory v $\mathcal{H}$ nad $\mathbb{R}$. Nyní zavedeme pojem úhlu ještě pro několik speciálních typů množin. [50]

[50]Definice úhlu mezi přímkami, přímkou a nadrovinou a nadrovinami by bylo možné zobecnit i pro $\mathcal{H}$ nad $\mathbb{C}$. Jelikož ale v takových prostorech nemáme definovaný úhel mezi vektory, nemělo by takové zobecnění dobrý smysl.

Definice 6.15. Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}$ nad $\mathbb{R}$, kde $\dim \mathcal{H} < +\infty$, a nechť p, q jsou přímky v $\mathcal{H}$ a W, W_1 a W_2 jsou nadroviny v $\mathcal{H}$.

- **Úhlem mezi přímkami** p a q nazveme číslo
$$\arccos \frac{|\langle \vec{s}_p \,|\, \vec{s}_q \rangle|}{\|\vec{s}_p\| \|\vec{s}_q\|},$$
kde $\vec{s}_p$, respektive $\vec{s}_q$ je směrový vektor přímky p, respektive q.

- **Úhlem mezi přímkou** p **a nadrovinou** W nazveme číslo
$$\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{|\langle \vec{s}_p \,|\, \vec{n}_W \rangle|}{\|\vec{s}_p\| \|\vec{n}_W\|} = \arcsin \frac{|\langle \vec{s}_p \,|\, \vec{n}_W \rangle|}{\|\vec{s}_p\| \|\vec{n}_W\|},$$
kde $\vec{s}_p$ je směrový vektor přímky p a $\vec{n}_W$ je normálový vektor nadroviny W.

- **Úhlem mezi nadrovinami** W_1 a W_2 nazveme číslo
$$\arccos \frac{|\langle \vec{n}_{W_1} \,|\, \vec{n}_{W_2} \rangle|}{\|\vec{n}_{W_1}\| \|\vec{n}_{W_2}\|},$$
kde $\vec{n}_{W_1}$, respektive $\vec{n}_{W_2}$ je normálový vektor nadroviny W_1, respektive W_2.

Poznámka 6.16. Čtenář si rozmyslí, že definice je korektní, tedy že při různých volbách směrových a normálových vektorů vychází stále stejný úhel.

Úkol 6.17. V prostorech dimenze dva, kde nadrovinami jsou přímky, ověřte, že výpočtem podle všech tří definic vyjde stejný úhel.

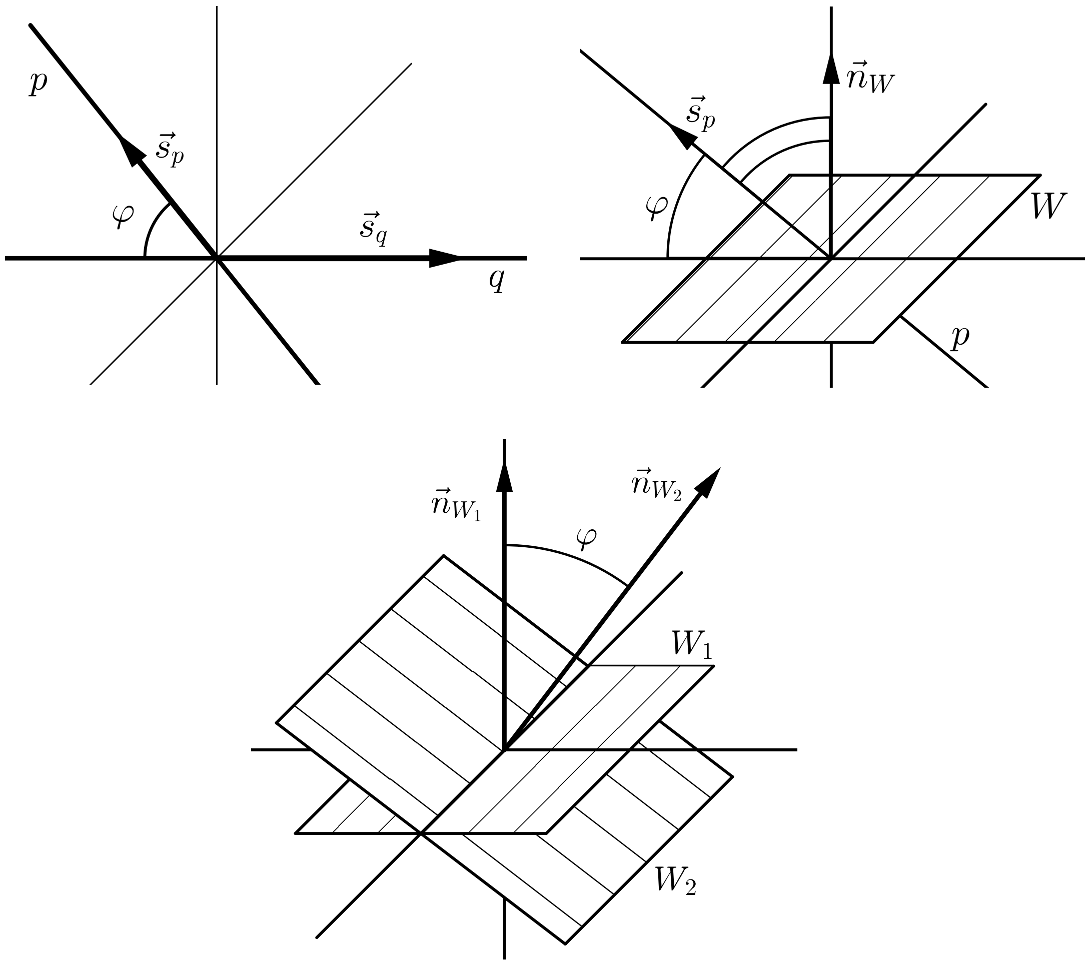
Poznámka 6.18. Výše definované úhly nabývají hodnot mezi nulou a $\frac{\pi}{2}$. To odpovídá v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ faktu, že např. za úhel mezi přímkami považujeme vždy nulový, ostrý nebo pravý úhel. Při různých volbách směrových vektorů přímek dostáváme totiž pro úhel mezi těmito vektory dvě různé hodnoty (pokud nejsou vektory kolmé): φ a $\pi - \varphi$. Úhlem mezi uvažovanými přímkami je potom podle definice menší z těchto čísel. Viz obrázek 13.

6.4 Vektorový součin

Motivace. V geometrii nám vektorový součin [51] umožňuje snadno hledat normály k rovinám (to se hodí např. v počítačové grafice) a poskytuje v kombinaci se skalárním součinem jednoduchý vzorec pro výpočet objemu rovnoběžnostěnu. S oběma součiny se lze setkat v teorii kvaternionů. [52] Právě kvaterniony se staly inspirací pro Maxwellovy

[51] Název vektorový součin je odvozen z faktu, že výstupem je vektor, zatímco u skalárního součinu je výstupem skalár, tedy číslo.

[52] William Rowan Hamilton (1805–1865), irský matematik, fyzik a astronom, zavedl v roce 1843 kvaterniony, což je nekomutativní rozšíření oboru komplexních čísel. Lze je definovat jako uspořádané čtveřice reálných čísel se speciálně definovanými operacemi sčítání a násobení. Jsou-li x a y kvaterniony s první složkou nulovou (zbylé složky označme $\vec{x}$, resp. $\vec{y}$), potom jejich součin má první složku rovnou záporně vzatému skalárnímu součinu $-\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle$ a zbylé složky vektorovému součinu $\vec{x} \times \vec{y}$.



Obrázek 13: Úhel mezi přímkami, přímkou a rovinou a rovinami v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$.

rovnice elektřiny a magnetismu. [53] Tyto rovnice zjednodušili do dnešní podoby Gibbs [54] a Heaviside. [55] Jimi zavedená vektorová analýza, která pracuje s diferenciálními operátory divergence (využívající skalárního součinu) a rotace (využívající vektorového součinu), se používá v mnoha oblastech fyziky k vyjádření zákonů zachování hmoty, hybnosti a energie.

Definice 6.19. Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ se skalárním součinem $\langle . | . \rangle$. **Vektorovým součinem** $\vec{x} \times \vec{y}$ nazveme vektor $\vec{z} \in \mathbb{R}^3$ splňující:

1. $\vec{z} \perp \vec{x}, \ \vec{z} \perp \vec{y}$,

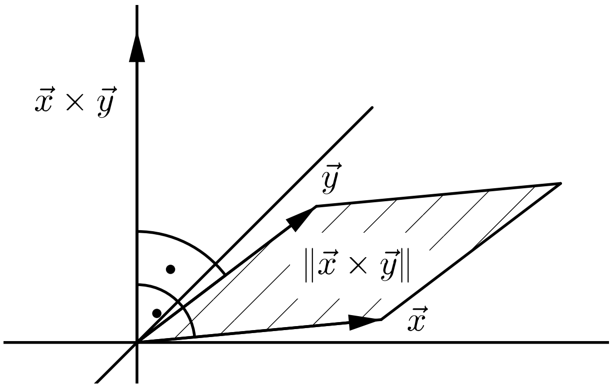
2. $\|\vec{z}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 - \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle^2$,

[53] James Clerk Maxwell (1831–1879), britský fyzik
[54] Josiah Willard Gibbs (1839–1903), americký matematik, fyzik a chemik
[55] Oliver Heaviside (1850–1925), britský matematik a fyzik samouk

3. $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \geq 0,$ kde $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \ \vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$

Poznámka 6.20.

- Vektorový součin $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$, právě když $\vec{x}$ a $\vec{y}$ jsou LZ vektory. Z druhé podmínky totiž plyne, že nulovou normu má $\vec{x} \times \vec{y}$, právě když nastává rovnost v Cauchyho–Schwarzově nerovnosti.
- Jsou-li $\vec{x}$ a $\vec{y}$ LN vektory, pak je opět vektorový součin $\vec{x} \times \vec{y}$ určen třemi podmínkami z definice jednoznačně. První určuje přímku, na níž leží. Druhá určuje velikost. Třetí určuje směr. Viz obrázek 14.



Obrázek 14: Vektorový součin $\vec{x} \times \vec{y}$ v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$.

Úkol 6.21. ** Soubor $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, který splňuje třetí podmínku z definice vektorového součinu, nazýváme **pravotočivým**. Dokažte, že třetí podmínka opravdu odpovídá v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$ naší představě pravotočivosti, tedy faktu, že pokud pravou rukou otáčíme ve směru úhlu od $\vec{x}$ k $\vec{y}$ (uvědomme si, že úhel nabývá hodnot jen od nuly do π), pak palec směřuje do poloprostoru, který obsahuje vektor $\vec{z}$. K pravdivosti tvrzení je ještě třeba předpokládat, že standardní bázi malujeme pravotočivě, což opravdu důsledně děláme.

Důsledek 6.22. *Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ se skalárním součinem, $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\vec{y} \neq \vec{0}$. Označme φ úhel mezi $\vec{x}$ a $\vec{y}$, pak platí:*

$$\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\| \sin \varphi.$$

Důkaz. Podle druhého bodu definice vektorového součinu víme, že

$$\begin{aligned} \|\vec{x} \times \vec{y}\|^2 &= \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 - \langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle^2 &&= \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 \left(1 - \tfrac{\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle^2}{\|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2}\right) \\ &= \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 (1 - \cos^2 \varphi) &&= \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

Jelikož $0 \leq \varphi \leq \pi$, je $\sin \varphi \geq 0$. Proto odmocněním výše uvedené rovnosti dostáváme dokazované tvrzení. $\square$

Poznámka 6.23. Číslo $\|\vec{x} \times \vec{y}\|$ tedy v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$ odpovídá obsahu rovnoběžníka daného vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$. Viz obrázek 14.

Věta 6.24 (Výpočet vektorového součinu)**.** *Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je pravotočivá ON báze $\mathbb{R}^3$ se skalárním součinem. Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$, $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ a $(\vec{y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$. Potom platí:*

$$(\vec{x} \times \vec{y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Označme $\vec{z}$ vektor splňující:

$$(\vec{z})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

K důkazu, že $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$, je třeba ověřit tři axiomy vektorového součinu.

1. Podle věty 5.32 platí:
$$\langle \vec{x} \,|\, \vec{z} \rangle = \sum_{i=1}^{3} \langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_i \rangle \langle \vec{z} \,|\, \vec{x}_i \rangle.$$
Ze znalosti Fourierových koeficientů (souřadnic v ON bázi) dostáváme:
$$\sum_{i=1}^{3} \langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_i \rangle \langle \vec{z} \,|\, \vec{x}_i \rangle = \alpha_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} + \alpha_2 \begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}.$$
Tento výraz ovšem vznikne rozvojem determinantu určité singulární matice podle posledního sloupce:
$$\alpha_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} + \alpha_2 \begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \alpha_3 \end{vmatrix} = 0.$$
Tím je dokázáno, že $\vec{x} \perp \vec{z}$. Podobně se ukáže, že $\vec{y} \perp \vec{z}$.

2. Opět s využitím věty 5.32 a znalosti Fourierových koeficientů odvodíme:
$$\|\vec{z}\|^2 = \sum_{i=1}^{3} \langle \vec{z} \,|\, \vec{x}_i \rangle^2 = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}^2,$$

$$\|\vec{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{3} \langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_i \rangle^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2,$$

$$\|\vec{y}\|^2 = \sum_{i=1}^{3} \langle \vec{y} \,|\, \vec{x}_i \rangle^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2,$$

$$\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{3} \langle \vec{x} \,|\, \vec{x}_i \rangle \langle \vec{y} \,|\, \vec{x}_i \rangle = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \beta_i.$$

Roznásobením pak dostaneme kýženou rovnost:

$$\|\vec{z}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 - \langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle^2.$$

3. Označme $\mathbb{X}$ matici, jejíž sloupce jsou popořadě vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$, a $\mathbb{A}$ matici, jejíž sloupce jsou popořadě vektory $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$. Pak platí:

$$\mathbb{A} = \mathbb{X} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} \\ \alpha_2 & \beta_2 & \begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} \\ \alpha_3 & \beta_3 & \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

Dle předpokladu věty je $\det \mathbb{X} > 0$. Dále rozvojem determinantu dle třetího sloupce získáme:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} \\ \alpha_2 & \beta_2 & \begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} \\ \alpha_3 & \beta_3 & \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}^2 \geq 0.$$

Odtud podle vztahu pro determinant součinu matic plyne, že $\det \mathbb{A} \geq 0$, což jsme chtěli dokázat. □

Věta 6.25 (Vlastnosti vektorového součinu)**.** *Nechť* $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ *se skalárním součinem,* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Pak platí, že vektorový součin je:*

1. **antisymetrický***, tj.* $\vec{y} \times \vec{x} = -(\vec{x} \times \vec{y})$*,*

2. **lineární v obou argumentech***, tj.*

$$(\alpha\vec{x} + \vec{y}) \times \vec{z} = \alpha(\vec{x} \times \vec{z}) + (\vec{y} \times \vec{z}),$$

$$\vec{x} \times (\alpha\vec{y} + \vec{z}) = \alpha(\vec{x} \times \vec{y}) + (\vec{x} \times \vec{z}).$$

Důkaz.

1. Plyne z věty 6.24 a ze změny znaménka při záměně sloupců v determinantu.

2. Nechť $\mathcal{X}$ je pravotočivá ON báze $\mathbb{R}^3$ a $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$, $(\vec{y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$, $(\vec{z})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$.

   S využitím n-linearity determinantů máme:

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \alpha\alpha_2 + \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha\alpha_3 + \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \alpha\alpha_3 + \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha\alpha_1 + \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \alpha\alpha_1 + \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha\alpha_2 + \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \alpha_3 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \beta_3 & \gamma_3 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

   To ale podle věty 6.24 znamená právě identitu $((\alpha\vec{x} + \vec{y}) \times \vec{z})_{\mathcal{X}} = \alpha(\vec{x} \times \vec{z})_{\mathcal{X}} + (\vec{y} \times \vec{z})_{\mathcal{X}}$. Odtud již je zřejmá linearita v prvním argumentu. Podobně se ukáže linearita ve druhém argumentu. □

Příklad 6.26. Je dán rovnoběžnostěn určený vrcholy $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ a $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, tj. množina $\{\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \langle 0, 1\rangle\}$. Ilustrace je na obrázku 2. Dokažte, že potom pro jeho objem platí:

$$V = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \right|.$$

Tato úloha byla zadána již v kapitole o determinantech. Ovšem až nyní se znalostí skalárního a vektorového součinu se stává triviální.

Řešení: Objem rovnoběžnostěnu je dán vzorcem $V = Sv$, kde S je obsah podstavy a v je výška. Obsah podstavy dané vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ je podle poznámky 6.23 roven $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$. Výška je rovna normě OG průmětu $\vec{c}$ na normálu (přímku danou normálovým vektorem) roviny podstavy $P = [\vec{a}, \vec{b}]_\lambda$. Jelikož $\frac{1}{\|\vec{a}\times\vec{b}\|}(\vec{a} \times \vec{b})$ je ON báze $P^\perp$, dostaneme OG průmět podle vzorce v poznámce 5.39:

$$\vec{c}_{P^\perp} = \left\langle \vec{c} \,\middle|\, \frac{1}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}(\vec{a} \times \vec{b}) \right\rangle \frac{1}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}(\vec{a} \times \vec{b}).$$

Proto $v = \|\vec{c}_{P^\perp}\| = \frac{|\langle \vec{c} \,|\, \vec{a}\times\vec{b}\rangle|}{\|\vec{a}\times\vec{b}\|}$. Celkem tedy $V = |\langle \vec{c} \,|\, \vec{a} \times \vec{b}\rangle|$. Podle věty 6.24 platí:

$$|\langle \vec{c} \,|\, \vec{a} \times \vec{b}\rangle| = \left| c_1 \det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} + c_2 \det \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix} + c_3 \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \right|,$$

přičemž v poslední rovnosti jsme využili rozvoj determinantu podle posledního sloupce.

7 Rieszova věta a sdružený operátor

Motivace. Rieszova věta (někdy nazývaná Rieszova věta o reprezentaci) je důležité matematické tvrzení z oboru funkcionální analýzy. Tato věta umožňuje reprezentovat lineární funkcionály na prostoru se skalárním součinem jistým prvkem tohoto prostoru, odhaluje tedy vzájemně jednoznačný vztah mezi prostory se skalárním součinem a prostory k nim duálními. Dále dává tato věta dobrý smysl hojně užívané braketové symbolice, protože každému lineárnímu funkcionálu (značenému $\langle\varphi|$ a nazývanému též bra-vektor) odpovídá jediný vektor (značený $|\varphi\rangle$ a nazývaný ket-vektor). [56] Rieszova věta je také nezbytná pro zavedení sdružených operátorů.

V celé kapitole uvažujeme pouze $T = \mathbb{C}$ nebo $T = \mathbb{R}$, pracujeme totiž se skalárním součinem.

7.1 Rieszova věta

Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}$ nad tělesem T a nechť $\vec{y} \in \mathcal{H}$. Definujme funkcionál φ předpisem $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle$ pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}$. Pak je φ díky linearitě skalárního součinu v prvním argumentu lineární funkcionál. Na otázku, zda lze naopak každý lineární funkcionál na $\mathcal{H}$ zapsat pomocí skalárního součinu, dává na prostorech konečné dimenze odpověď Rieszova věta. [57]

Věta 7.1 (Rieszova)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem T. Je-li $\varphi \in (\mathcal{H}_n)^\#$, pak existuje právě jeden vektor $\vec{y} \in \mathcal{H}_n$ takový, že $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle$ pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$.*

Důkaz. Dokážeme jednoznačnost a existenci. Důkaz rozdělíme na dva případy – pro nulový a nenulový funkcionál.

- Je-li $\varphi = \Theta$, pak evidentně existuje jediný takový vektor $\vec{y} = \vec{0}$.
- Je-li $\varphi \neq \Theta$, pak $h(\varphi) = 1 = \operatorname{codim} \ker \varphi$. Podle věty 5.37 máme $\dim(\ker\varphi)^\perp = 1$. Nechť $\vec{u}$ je bazický vektor $(\ker\varphi)^\perp$ a $\|\vec{u}\| = 1$. Pokud $\vec{y}$ má splňovat $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle$ pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$, pak speciálně pro $\vec{x} \in \ker\varphi$ platí $0 = \langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle$. Tudíž $\vec{y} \in (\ker\varphi)^\perp$, tj. $\vec{y} = \alpha\vec{u}$ pro nějaké $\alpha \in T$. Najděme α dosazením $\vec{x} = \vec{u}$:

$$\varphi(\vec{u}) = \langle \vec{u} \,|\, \alpha\vec{u} \rangle = \overline{\alpha}\|\vec{u}\|^2 = \overline{\alpha}.$$

[56] Braketová notace se rozšířila zejména v kvantové mechanice. Symboliku představil v roce 1939 Paul Dirac, proto se jí také říká Diracova. Termín braketová pochází ze slova bracket, což je anglicky závorka. Levé straně reprezentující funkcionály se proto říká bra $\langle . |$ a pravé straně symbolizující vektory ket $| . \rangle$. S tímto značením také souvisí námi zvolený zápis skalárního součinu $\langle . \,|\, . \rangle$.

[57] Frigyes Riesz [výslovnost „rís“] (1880–1956) byl maďarský matematik s významným přínosem v oblasti funkcionální analýzy. Upozorňujeme čtenáře zejména na správnou výslovnost jeho jména. Studentům se stává, že autorství věty připisují Ríšovi místo Rieszovi.

Jediným kandidátem na $\vec{y}$ je proto $\overline{\varphi(\vec{u})}\vec{u}$. Ověřme, že splňuje $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle$ pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$. Berme libovolné $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$, pak existuje jediný rozklad $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, kde $\vec{a} \in \ker \varphi$ a $\vec{b} \in (\ker \varphi)^\perp$, tedy $\vec{b} = \beta \vec{u}$. Odtud máme:

$$\varphi(\vec{x}) = \varphi(\vec{a}) + \varphi(\beta\vec{u}) = 0 + \beta\varphi(\vec{u}).$$

Zároveň platí:

$$\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = \left\langle \vec{a} + \beta\vec{u} \,\middle|\, \overline{\varphi(\vec{u})}\vec{u} \right\rangle = \varphi(\vec{u})\langle \vec{a} \,|\, \vec{u} \rangle + \beta\varphi(\vec{u})\langle \vec{u} \,|\, \vec{u} \rangle = 0 + \beta\varphi(\vec{u}). \qquad \square$$

Poznámka 7.2. Již v poznámce 6.11 jsme avizovali, že normálové a neparametrické rovnice lineárních variet jsou stejné na prostorech se skalárním součinem konečné dimenze. Rieszova věta dokazuje, že tomu tak opravdu je. [58]

7.2 Sdružený operátor

Definice 7.3. Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Pokud $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ a B splňuje pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}_n$ vztah:

$$\langle A\vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} \,|\, B\vec{y} \rangle,$$

pak B nazveme **sdruženým operátorem** k A a značíme A^*.

Jak uvidíme v následující větě, sdružený operátor k A je vždy právě jeden, proto má smysl zavést pro něj speciální symbol A^*. [59] Než větu vyslovíme, uveďme ještě pomocné lemma, které opakovaně využijeme v jejím důkazu.

Lemma 7.4. *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}$ nad tělesem T a $\vec{y} \in \mathcal{H}$. Pokud $\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = 0$ pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}$, pak $\vec{y} = \vec{0}$.*

Důkaz. Dosadíme-li $\vec{x} = \vec{y}$, potom máme $\|\vec{y}\|^2 = 0$, tudíž $\vec{y} = \vec{0}$. $\square$

Věta 7.5 (Existence a jednoznačnost sdruženého operátoru)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Pak existuje právě jeden sdružený operátor k A.*

Důkaz.

- Existence: Definujme pro každé $\vec{y} \in \mathcal{H}_n$ funkcionál

$$\varphi_{\vec{y}}(\vec{x}) = \langle A\vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle \quad \text{pro každé } \vec{x} \in \mathcal{H}_n.$$

[58] Přemýšlivý čtenář možná hloubá, zda neplatí Rieszova věta i na prostorech nekonečné dimenze. Ve funkcionální analýze se dozvíte, že v Hilbertových prostorech nekonečné dimenze opravdu platí.

[59] V kvantové mechanice se často užívá značení $A^\dagger$, zejména při práci s braketovou symbolikou. Objevuje se ale třeba i značení A_{ad}.

Z linearity skalárního součinu v prvním argumentu a linearity A plyne, že $\varphi_{\vec{y}} \in (\mathcal{H}_n)^{\#}$. Podle Rieszovy věty existuje právě jeden vektor $\vec{z}$ splňující $\varphi_{\vec{y}}(\vec{x}) = \langle \vec{x} \,|\, \vec{z} \rangle$ pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$. Položíme-li $A^*\vec{y} = \vec{z}$, pak A^* bude zobrazení a bude splňovat $\langle A\vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} \,|\, A^*\vec{y} \rangle$ pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}_n$.

Zbývá ověřit linearitu A^*. Nechť $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \mathcal{H}_n$ a $\alpha \in T$, potom pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$ plyne z antilinearity skalárního součinu ve druhém argumentu a z definice A^*:

$$\begin{aligned} \langle A\vec{x} \,|\, \alpha\vec{y}_1 + \vec{y}_2 \rangle &= \overline{\alpha}\langle A\vec{x} \,|\, \vec{y}_1 \rangle + \langle A\vec{x} \,|\, \vec{y}_2 \rangle \\ &= \overline{\alpha}\langle \vec{x} \,|\, A^*\vec{y}_1 \rangle + \langle \vec{x} \,|\, A^*\vec{y}_2 \rangle \\ &= \langle \vec{x} \,|\, \alpha A^*\vec{y}_1 + A^*\vec{y}_2 \rangle. \end{aligned}$$

Zároveň $\langle A\vec{x} \,|\, \alpha\vec{y}_1 + \vec{y}_2 \rangle = \langle \vec{x} \,|\, A^*(\alpha\vec{y}_1 + \vec{y}_2) \rangle$. Odečtením výrazů dostáváme:

$$\langle \vec{x} \,|\, \alpha A^*\vec{y}_1 + A^*\vec{y}_2 - A^*(\alpha\vec{y}_1 + \vec{y}_2) \rangle = 0.$$

Jelikož vztah platí pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$, plyne z lemmatu 7.4 kýžená rovnost:

$$A^*(\alpha\vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \alpha A^*\vec{y}_1 + A^*\vec{y}_2.$$

- Jednoznačnost: Nechť $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ a pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}_n$ platí, že $\langle A\vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} \,|\, B\vec{y} \rangle$. Uvažujme zároveň zobrazení A^* definované v předchozím bodě. Pak odečtením získáme pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$ rovnost:

  $$\langle \vec{x} \,|\, B\vec{y} - A^*\vec{y} \rangle = 0.$$

  Podle lemmatu 7.4 platí $B\vec{y} = A^*\vec{y}$ pro každé $\vec{y} \in \mathcal{H}_n$, tedy $B = A^*$. □

Věta 7.6 (Vlastnosti sdruženého operátoru)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem T. Nechť dále $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ a $\alpha \in T$. Pak platí:*

1. $(A + B)^* = A^* + B^*$.
2. $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$.
3. $(AB)^* = B^* A^*$.
4. $(A^*)^* = A$.
5. $I^* = I$.
6. $\Theta^* = \Theta$.
7. *Je-li A regulární, potom A^* je také regulární a splňuje:*

   $$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Důkaz. Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}_n$, pak platí:

1. $$\begin{aligned} \langle (A+B)\vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle &= \langle A\vec{x} + B\vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = \langle A\vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle + \langle B\vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} \,|\, A^*\vec{y} \rangle + \langle \vec{x} \,|\, B^*\vec{y} \rangle \\ &= \langle \vec{x} \,|\, A^*\vec{y} + B^*\vec{y} \rangle = \langle \vec{x} \,|\, (A^* + B^*)\vec{y} \rangle. \end{aligned}$$
   Jelikož sdružený operátor je jediný, je tímto dokázána rovnost $(A+B)^* = A^* + B^*$.
2. $\langle (\alpha A)\vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = \langle \alpha(A\vec{x}) \,|\, \vec{y} \rangle = \alpha \langle A\vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = \alpha \langle \vec{x} \,|\, A^*\vec{y} \rangle = \langle \vec{x} \,|\, \overline{\alpha}(A^*\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x} \,|\, (\overline{\alpha} A^*)\vec{y} \rangle$.
3. $\langle (AB)\vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = \langle A(B\vec{x}) \,|\, \vec{y} \rangle = \langle B\vec{x} \,|\, A^*\vec{y} \rangle = \langle \vec{x} \,|\, B^*(A^*\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x} \,|\, (B^*A^*)\vec{y} \rangle$.
4. $\langle A^*\vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = \overline{\langle \vec{y} \,|\, A^*\vec{x} \rangle} = \overline{\langle A\vec{y} \,|\, \vec{x} \rangle} = \langle \vec{x} \,|\, A\vec{y} \rangle$.
5. $\langle I\vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} \,|\, I\vec{y} \rangle$.
6. $\langle \Theta\vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = 0 = \langle \vec{x} \,|\, \Theta\vec{y} \rangle$.
7. Použitím již dokázaného třetího a pátého bodu máme $A^*(A^{-1})^* = (A^{-1}A)^* = I^* = I$. Odtud již plyne $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$, tedy i regularita A^*. □

Nyní objasníme, jak souvisejí matice operátoru A^* a operátoru A, a následně prozkoumáme vztah determinantů a spekter A^* a A.

Věta 7.7 (Matice sdruženého operátoru)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem T. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ a $\mathcal{X}$ je ON báze $\mathcal{H}_n$. Pak platí:*

$$^{\mathcal{X}}(A^*) = (^{\mathcal{X}}A)^H.$$

Důkaz. Označme $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$. S využitím ortonormality báze (i-tá souřadnice je rovna i-tému Fourierovu koeficientu) a vlastností skalárního součinu dostáváme pro $i, j \in \hat{n}$:

$$\begin{aligned} [^{\mathcal{X}}(A^*)]_{ij} &= x_i^{\#}(A^*\vec{x}_j) &= \langle A^*\vec{x}_j \,|\, \vec{x}_i \rangle &= \langle \vec{x}_j \,|\, A\vec{x}_i \rangle \\ &= \overline{\langle A\vec{x}_i \,|\, \vec{x}_j \rangle} &= \overline{x_j^{\#}(A\vec{x}_i)} &= \overline{[^{\mathcal{X}}A]_{ji}} &= [(^{\mathcal{X}}A)^H]_{ij}. \end{aligned}$$ □

Důsledek 7.8 (Determinant sdruženého operátoru)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem T. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Potom* $\det A^* = \overline{\det A}$.

Důkaz. Uvažujme ON bázi $\mathcal{X}$ prostoru $\mathcal{H}_n$. Podle definice determinantu operátoru platí rovnost $\det A = \det(^{\mathcal{X}}A)$. Dále máme s použitím věty 7.7 a faktu, že determinant se transponováním matice nemění, následující vztah:

$$\det A^* = \det(^{\mathcal{X}}(A^*)) = \det\left((^{\mathcal{X}}A)^H\right) = \overline{\det\left((^{\mathcal{X}}A)^T\right)} = \overline{\det(^{\mathcal{X}}A)}.$$ □

Příklad 7.9. Nechť $\mathbb{C}^3$ je unitární prostor a $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ splňuje pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$:

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}x_1 - 2x_2 \\ -\mathrm{i}x_2 + x_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Najděte předpis pro $A^*\vec{x}$ pro každé $\vec{x} \in \mathbb{C}^3$.

Řešení: Jelikož ${}^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & -2 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, dostáváme podle věty 7.7, že ${}^{\mathcal{E}}(A^*) = ({}^{\mathcal{E}}A)^H = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ -2 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Proto pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ platí, že $A^*\vec{x} = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}x_1 \\ -2x_1 + \mathrm{i}x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Věta 7.10 (Spektrum sdruženého operátoru)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem T. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Potom $\lambda \in \sigma(A)$, právě když $\overline{\lambda} \in \sigma(A^*)$.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{X}$ je ON báze $\mathcal{H}_n$. Označme $\mathbb{A} = {}^{\mathcal{X}}A$, potom podle věty 7.7 platí $\mathbb{A}^H = {}^{\mathcal{X}}(A^*)$. Jelikož se transponováním nemění determinant matice, je jistě pro každé $t \in \mathbb{C}$ pravda:

$$\det(\mathbb{A} - t\mathbb{I}) = \det(\mathbb{A}^T - t\mathbb{I}) = \overline{\det(\mathbb{A}^H - \overline{t}\,\mathbb{I})}.$$

Odtud pro charakteristické polynomy operátorů A a A^* plyne, že $p_A(t) = \overline{p_{A^*}(\overline{t})}$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. Pokud je $T = \mathbb{C}$, dostáváme, že $\lambda \in p_A^{-1}(0) = \sigma(A)$ právě tehdy, když $\overline{\lambda} \in p_{A^*}^{-1}(0) = \sigma(A^*)$. Pokud je $T = \mathbb{R}$, pak zřejmě platí, že $\lambda \in p_A^{-1}(0) \cap \mathbb{R} = \sigma(A)$ právě tehdy, když $\overline{\lambda} \in p_{A^*}^{-1}(0) \cap \mathbb{R} = \sigma(A^*)$. $\square$

Poznámka 7.11. Speciálně nad tělesem $\mathbb{R}$ lze komplexní sdružování vynechat, tj. platí, že $\sigma(A) = \sigma(A^*)$.

7.3 Normální operátory a normální matice

Motivace. Podtřídy normálních operátorů – hermitovské a unitární operátory – hrají zásadní roli v matematické formulaci kvantové mechaniky. Fyzikálním stavům odpovídají vektory v komplexním Hilbertově prostoru. Pozorovatelné – veličiny, které jsou měřitelné fyzikálním experimentem – jsou reprezentovány hermitovskými operátory. Jako výsledky měření získáváme vlastní čísla pozorovatelných. Ta jsou díky hermitovskosti reálná. Časový vývoj systému zase popisují evoluční operátory, což jsou unitární operátory. Díky unitaritě zachovávají velikost vektorů.

S normálními operátory a normálními maticemi se ale setkáte i jinde. My už jsme viděli souvislost mezi hermitovskými maticemi a hermitovskými formami. Bližším studiem hermitovských matic se nám teď navíc podaří odvodit spektrální kritérium, na jehož základě lze rozhodnout o charakteru kvadratické formy.

Věty v této kapitole budou vysloveny pro prostory $\mathcal{H}_n$ nad tělesem $\mathbb{C}$. V poznámkách, které pro zvýraznění nazveme „reálné poznámky“, uvedeme, jak by příslušná tvrzení vypadala nad tělesem $\mathbb{R}$. Proto ještě než výklad začneme, máme pro čtenáře úkol.

Úkol 7.12. * Dokažte všechna tvrzení z „reálných poznámek“.

Další zvláštností této kapitoly je fakt, že se nejprve budeme zabývat normálními operátory, až poté normálními maticemi, zatímco v ostatních kapitolách jsme vždy pojmy nejprve definovali a zkoumali pro matice, a až poté pro operátory. Důvod je ten, že Rieszova věta dává přirozeně vzniknout sdruženému operátoru, zatímco konstrukce sdružených operátorů pomocí hermitovsky sdružených matic by souvislost s Rieszovou větou neodhalila.

Definice 7.13. Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem $\mathbb{C}$ a nechť je dán operátor $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$.

(a) Pokud $AA^* = A^*A$, pak A nazveme **normálním**.

(b) Pokud $A = A^*$, pak A nazveme **hermitovským**.

(c) Pokud $AA^* = I$, pak A nazveme **unitárním**.

Z definice je zřejmé, že každý hermitovský operátor je normální a také každý unitární operátor je normální.

Reálná poznámka 7.14. Nad tělesem $\mathbb{R}$ říkáme, že A je **symetrický** místo hermitovský a také **ortogonální** místo unitární.

Definice 7.15. Nechť je dána matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$.

(a) Pokud $\mathbb{A}\mathbb{A}^H = \mathbb{A}^H\mathbb{A}$, pak $\mathbb{A}$ nazveme **normální**.

(b) Pokud $\mathbb{A} = \mathbb{A}^H$, pak $\mathbb{A}$ nazveme **hermitovskou**.

(c) Pokud $\mathbb{A}\mathbb{A}^H = \mathbb{I}$, pak $\mathbb{A}$ nazveme **unitární**.

Reálná poznámka 7.16. Stejnou terminologii jako u operátorů nad tělesem $\mathbb{R}$ zavádíme i pro reálné matice. Je-li matice $\mathbb{A}$ reálná a $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$, pak ji nazveme **symetrickou**. Je-li $\mathbb{A}$ reálná a $\mathbb{A}\mathbb{A}^T = \mathbb{I}$, nazveme ji **ortogonální** maticí.

Věta 7.17 (Normální operátory a normální matice)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem $\mathbb{C}$. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ a $\mathcal{X}$ je ON báze $\mathcal{H}_n$.*

1. *A je normální operátor, právě když ${}^{\mathcal{X}}\!A$ je normální matice.*

2. *A je hermitovský operátor, právě když ${}^{\mathcal{X}}\!A$ je hermitovská matice.*

3. *A je unitární operátor, právě když ${}^{\mathcal{X}}\!A$ je unitární matice.*

Důkaz. Dokážeme pouze první tvrzení. Důkazy pro hermitovskost a unitaritu jsou analogické. A je normální operátor $\Leftrightarrow AA^* = A^*A \Leftrightarrow {}^{\mathcal{X}}(AA^*) = {}^{\mathcal{X}}(A^*A) \Leftrightarrow ({}^{\mathcal{X}}\!A)\left({}^{\mathcal{X}}(A^*)\right) = \left({}^{\mathcal{X}}(A^*)\right)({}^{\mathcal{X}}\!A) \Leftrightarrow ({}^{\mathcal{X}}\!A)\left(({}^{\mathcal{X}}\!A)^H\right) = \left(({}^{\mathcal{X}}\!A)^H\right)\left({}^{\mathcal{X}}\!A\right) \Leftrightarrow {}^{\mathcal{X}}\!A$ je normální matice. V předposlední ekvivalenci jsme využili větu 7.7. $\square$

Reálná poznámka 7.18. Abychom dostali analogickou větu nad tělesem $\mathbb{R}$, stačí ve větě 7.17 nahradit hermitovskost symetrií a unitaritu ortogonalitou.

Příklad 7.19. Uveďme příklady normálních operátorů na unitárním prostoru $\mathbb{C}^2$. Standardní bázi značíme jako vždy $\mathcal{E}$.

(a) Nechť $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$,

$$^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}, \quad ^{\mathcal{E}}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Operátory A, B jsou normální podle věty 7.17. Nejsou ovšem ani unitární, ani hermitovské.

(b) Nechť $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$,

$$^{\mathcal{E}}A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}, \quad ^{\mathcal{E}}B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{pro } \varphi \in \mathbb{R}.$$

Operátory A, B jsou unitární podle věty 7.17. (Bystrý čtenář si rozmyslí, že pro kontrolu unitarity matice stačí hlídat, aby sloupce tvořily ON soubor při standardním skalárním součinu.)

(c) Nechť $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$,

$$^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 1 & 2\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}, \quad ^{\mathcal{E}}B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Operátory A, B jsou hermitovské podle věty 7.17.

Reálná poznámka 7.20. Pokud v příkladu 7.19 předpokládáme, že $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ a $\mathcal{E}$ je standardní báze $\mathbb{R}^2$, pak v prvním bodě je B příkladem normálního operátoru, který není symetrický, ani ortogonální, ve druhém bodě je B příkladem ortogonálního a ve třetím bodě symetrického operátoru.

Uvedeme důležité vlastnosti normálních operátorů. K jejich důkazu potřebujeme následující lemma.

Lemma 7.21. *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem $\mathbb{C}$. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ a A je hermitovský operátor. Jestliže $\langle A\vec{x} \,|\, \vec{x}\rangle = 0$ pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$, pak $A = \Theta$.*

Důkaz. Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}_n$ platí:

$$0 = \langle A(\vec{x}+\vec{y}) \,|\, (\vec{x}+\vec{y})\rangle = \langle A\vec{x} \,|\, \vec{x}\rangle + \langle A\vec{x} \,|\, \vec{y}\rangle + \langle A\vec{y} \,|\, \vec{x}\rangle + \langle A\vec{y} \,|\, \vec{y}\rangle = \langle A\vec{x} \,|\, \vec{y}\rangle + \langle \vec{y} \,|\, A\vec{x}\rangle,$$

přičemž v poslední rovnosti jsme mimo jiné využili hermitovskosti. Vidíme tudíž, že $0 = 2\mathrm{Re}\langle A\vec{x} \,|\, \vec{y}\rangle$. Dosadíme-li $\vec{y} = A\vec{x}$, dostáváme:

$$0 = 2\mathrm{Re}\langle A\vec{x} \,|\, A\vec{x}\rangle = 2\|A\vec{x}\|^2,$$

proto $A\vec{x} = \vec{0}$. $\square$

Reálná poznámka 7.22. Stejné lemma můžeme využít v důkazech, pokud bude $\mathcal{H}_n$ nad tělesem $\mathbb{R}$ a A symetrický operátor.

Věta 7.23 (Charakterizace normálních operátorů)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem $\mathbb{C}$ a $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Pak A je normální, právě když $\|A\vec{x}\| = \|A^*\vec{x}\|$ pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$.*

Důkaz.

- $(\Rightarrow)$: Je-li A normální, pak máme:

$$\langle A\vec{x}\,|\,A\vec{x}\rangle = \langle \vec{x}\,|\,A^*A\vec{x}\rangle = \langle \vec{x}\,|\,AA^*\vec{x}\rangle = \langle A^*\vec{x}\,|\,A^*\vec{x}\rangle.$$

- $(\Leftarrow)$: Ukažme nejprve s využitím věty 7.6, že $AA^* - A^*A$ je hermitovský operátor.

$$(AA^* - A^*A)^* = (A^*)^*A^* - A^*(A^*)^* = AA^* - A^*A.$$

  Pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$ platí:

$$\langle (AA^* - A^*A)\vec{x}\,|\,\vec{x}\rangle = \langle AA^*\vec{x}\,|\,\vec{x}\rangle - \langle A^*A\vec{x}\,|\,\vec{x}\rangle = \langle A^*\vec{x}\,|\,A^*\vec{x}\rangle - \langle A\vec{x}\,|\,A\vec{x}\rangle = 0.$$

  Podle lemmatu 7.21 je $AA^* - A^*A = \Theta$, tudíž A je normální. □

Reálná poznámka 7.24. Pro prostory $\mathcal{H}_n$ nad tělesem $\mathbb{R}$ platí zcela obdobná charakterizace normálních operátorů.

Normální operátory mají zajímavé spektrální vlastnosti. Popíšeme je v následujících třech větách.

Věta 7.25 (Vlastní vektory normálních operátorů)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem $\mathbb{C}$. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ a A je normální. Pak platí:*

1. *$\lambda \in \sigma(A)$ a $\vec{x}$ je vlastní vektor A příslušný λ, právě když $\overline{\lambda} \in \sigma(A^*)$ a $\vec{x}$ je vlastní vektor A^* příslušný $\overline{\lambda}$.*
2. *Vlastní vektory příslušné vzájemně různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé.*

Důkaz.

1. Snadno nahlédneme, že $A - tI$ je normální operátor pro každé $t \in \mathbb{C}$. Podle věty 7.23 dostaneme:

$$\|(A - tI)\vec{x}\| = \|(A^* - \overline{t}I)\vec{x}\|,$$

   čímž je ekvivalence dokázaná.

2. Nechť $\lambda, \nu \in \sigma(A)$, $\lambda \neq \nu$. Nechť $\vec{x}$ je vlastní vektor A příslušný λ a $\vec{y}$ je vlastní vektor A příslušný ν. Pak platí:

$$\lambda\langle\vec{x}\,|\,\vec{y}\rangle = \langle\lambda\vec{x}\,|\,\vec{y}\rangle = \langle A\vec{x}\,|\,\vec{y}\rangle = \langle\vec{x}\,|\,A^*\vec{y}\rangle = \langle\vec{x}\,|\,\overline{\nu}\vec{y}\rangle = \nu\langle\vec{x}\,|\,\vec{y}\rangle.$$

Odtud plyne, že $(\lambda - \nu)\langle\vec{x}\,|\,\vec{y}\rangle = 0$. Jelikož $\lambda \neq \nu$, je dokázáno, že $\langle\vec{x}\,|\,\vec{y}\rangle = 0$. □

Reálná poznámka 7.26. Normální operátory mají stejné vlastnosti nad tělesem $\mathbb{R}$. Navíc lze pak v prvním bodě vynechat komplexní sdružování.

Věta 7.27 (Diagonalizovatelnost normálních operátorů)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem $\mathbb{C}$ a $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Je-li A normální, pak A je diagonalizovatelný.*

Důkaz. Jelikož těleso je rovno $\mathbb{C}$, platí automaticky, že $\sigma(A) = p_A^{-1}(0)$. Zbývá tedy ověřit, že $\nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda)$ pro každé $\lambda \in \sigma(A)$. Uvažujme libovolné $\lambda \in \sigma(A)$. Víme, že vlastní podprostor A příslušný λ splňuje, že $A(P_\lambda) \subset P_\lambda$. Ukažme, že také $A(P_\lambda^\perp) \subset P_\lambda^\perp$. K tomu stačí ověřit, že pro každé $\vec{x} \in P_\lambda^\perp$ a pro každé $\vec{z} \in P_\lambda$ platí, že $\langle A\vec{x}\,|\,\vec{z}\rangle = 0$. S využitím věty 7.25 máme:

$$\langle A\vec{x}\,|\,\vec{z}\rangle = \langle\vec{x}\,|\,A^*\vec{z}\rangle = \langle\vec{x}\,|\,\overline{\lambda}\vec{z}\rangle = \lambda\langle\vec{x}\,|\,\vec{z}\rangle = 0.$$

Označme $k = \nu_g(\lambda)$, $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ bázi P_λ a $\widehat{\mathcal{X}} = (\vec{x}_{k+1}, \dots, \vec{x}_n)$ bázi $P_\lambda^\perp$. Potom $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je báze $\mathcal{H}_n$, v níž má A blokově diagonální tvar:

$$^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} \lambda\mathbb{I}_k & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & {}^{\widehat{\mathcal{X}}}B \end{pmatrix},$$

kde $\mathbb{I}_k$ je jednotková matice řádu k a B je zúžení operátoru A na $P_\lambda^\perp$, neboli $B \in \mathcal{L}(P_\lambda^\perp)$ je definovaný jako $B\vec{x} = A\vec{x}$ pro každé $\vec{x} \in P_\lambda^\perp$. Vidíme pak, že $p_A(t) = (\lambda - t)^k p_B(t)$. Ukažme, že $p_B(\lambda) \neq 0$. Potom bude jasné, že $\nu_a(\lambda)$ se také rovná k.

Kdyby $p_B(\lambda) = 0$, pak $\lambda \in \sigma(B)$, tj. existoval by nenulový vektor $\vec{x} \in P_\lambda^\perp$ takový, že $\lambda\vec{x} = B\vec{x} = A\vec{x}$. Zároveň by tudíž platilo, že $\vec{x} \in P_\lambda$. Protože $P_\lambda \cap P_\lambda^\perp = \{\vec{0}\}$, měli bychom spor s nenulovostí $\vec{x}$. □

Poznámka 7.28. Opačná implikace ve větě 7.27 neplatí. Například na unitárním prostoru $\mathbb{C}^2$ pro operátor $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$, kde $^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, platí, že je diagonalizovatelný, ale není normální.

Reálná poznámka 7.29. Nad tělesem $\mathbb{R}$ lze obdobným způsobem dokázat pro normální operátor A, že $\nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda)$ pro každé $\lambda \in \sigma(A)$. Ovšem diagonalizovatelný být normální operátor nad $\mathbb{R}$ nemusí. Např. operátor B z příkladu 7.19 část (a) není diagonalizovatelný, protože $\sigma(B) = p_B^{-1}(0) \cap \mathbb{R} = \emptyset$.

Následující spektrální vlastnost normální operátory dokonce charakterizuje.

Věta 7.30 (Normální operátory a ON báze z vlastních vektorů)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem $\mathbb{C}$ a $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Pak A je normální, právě když v $\mathcal{H}_n$ existuje ON báze z vlastních vektorů.*

Důkaz.

- ($\Rightarrow$): Z věty 7.27 plyne, že pro normální operátor existuje báze prostoru $\mathcal{H}_n$ z vlastních vektorů. Z ní vyrobíme OG bázi z vlastních vektorů tak, že bazické vektory příslušející stejnému vlastnímu číslu, a náležející tudíž stejnému vlastnímu podprostoru, ortogonalizujeme Gramovým–Schmidtovým ortogonalizačním procesem. Vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé podle věty 7.25. Na závěr každý vektor vynásobíme převrácenou hodnotou jeho normy, čímž získáme hledanou ON bázi z vlastních vektorů.

- ($\Leftarrow$): Nechť $\mathcal{X}$ je báze z vlastních vektorů. Pak ${}^{\mathcal{X}}A = \mathbb{D}$, kde $\mathbb{D}$ je diagonální matice. Jak se čtenář bez obtíží přesvědčí, platí $\mathbb{D}\mathbb{D}^H = \mathbb{D}^H\mathbb{D}$. Je-li $\mathcal{X}$ navíc ON, potom podle věty 7.17 je A normální operátor. □

Reálná poznámka 7.31. Pro platnost věty 7.30 nad tělesem $\mathbb{R}$ je potřeba pozměnit tvrzení do podoby: „A je normální a $p_A^{-1}(0) \subset \mathbb{R}$, právě když v $\mathcal{H}_n$ existuje ON báze z vlastních vektorů.“

Na závěr kapitoly se podíváme ještě blíže na podtřídy normálních operátorů. Unitární a hermitovské operátory mají totiž některé specifické vlastnosti.

Věta 7.32 (Charakterizace unitárních operátorů)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem $\mathbb{C}$ a $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní.*

1. *A je unitární.*

2. *$A^{-1} = A^*$.*

3. *Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}_n$ platí:*
$$\langle A\vec{x} \,|\, A\vec{y} \rangle = \langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle.$$
Slovy: „Unitární operátor zachovává skalární součin.“

4. *Pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$ platí:*
$$\|A\vec{x}\| = \|\vec{x}\|.$$
Slovy: „Unitární operátor zachovává normu.“

Důkaz. Stačí dokázat cyklus implikací.

- 1. $\Rightarrow$ 2.: Plyne přímo z definice unitárního operátoru, jelikož A je operátor na prostoru konečné dimenze.
- 2. $\Rightarrow$ 3.: Pokud $A^{-1} = A^*$, pak $\langle A\vec{x} \,|\, A\vec{y}\rangle = \langle \vec{x} \,|\, A^*A\vec{y}\rangle = \langle \vec{x} \,|\, \vec{y}\rangle$.
- 3. $\Rightarrow$ 4.: Rovnost získáme dosazením $\vec{y} = \vec{x}$ ve třetím bodě.
- 4. $\Rightarrow$ 1.: Uvědomme si, že $A^*A - I$ je hermitovský operátor. Jelikož pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$ platí, že $\langle (A^*A - I)\vec{x} \,|\, \vec{x}\rangle = \langle A^*A\vec{x} \,|\, \vec{x}\rangle - \langle \vec{x} \,|\, \vec{x}\rangle = \langle A\vec{x} \,|\, A\vec{x}\rangle - \langle \vec{x} \,|\, \vec{x}\rangle = 0$, máme podle lemmatu 7.21 rovnost $A^*A - I = \Theta$. Protože jsme na prostoru konečné dimenze, platí automaticky také $AA^* = I$. □

Reálná poznámka 7.33. Charakterizace zůstává v platnosti i nad tělesem $\mathbb{R}$. Stačí nahradit slovo unitární za ortogonální.

Věta 7.34 (Vlastnosti unitárních operátorů)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem $\mathbb{C}$. Nechť $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ a A, B jsou unitární. Pak platí:*

1. *Pro každé $\lambda \in \sigma(A)$ je $|\lambda| = 1$.*
2. *$|\det A| = 1$.*
3. *AB je unitární.*

Důkaz.

1. Nechť $\lambda \in \sigma(A)$ a $\vec{x}$ je vlastní vektor A příslušný λ. Pak podle čtvrtého bodu věty 7.32 platí:
$$\|\vec{x}\| = \|A\vec{x}\| = \|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\|\vec{x}\|.$$
Jelikož $\vec{x} \neq \vec{0}$, máme $|\lambda| = 1$.

2. Z důsledku 7.8 plyne, že $\det A^* = \overline{\det A}$. Podle věty 7.32 zase platí rovnost $A^* = A^{-1}$. Máme tudíž:
$$\frac{1}{\det A} = \det A^{-1} = \det A^* = \overline{\det A}.$$
Celkově tedy dostáváme, že $|\det A|^2 = 1$, tj. $|\det A| = 1$. (Jiná možnost důkazu je uvědomit si, že $p_A^{-1}(0) = \sigma(A)$, proto je determinant operátoru součinem vlastních čísel.)

3. Zkontrolujme unitaritu užitím věty 7.6:
$$(AB)(AB)^* = (AB)(B^*A^*) = A(BB^*)A^* = AA^* = I.$$ □

Reálná poznámka 7.35. Vlastnosti z věty 7.34 mají i ortogonální operátory. Pro ně dokonce vlastní čísla a determinant mohou nabývat pouze hodnot ± 1.

Věta 7.36 (Vlastnosti hermitovských operátorů)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem $\mathbb{C}$. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ a A je hermitovský. Pak platí:*

1. *Pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$ je $\langle A\vec{x} \,|\, \vec{x} \rangle \in \mathbb{R}$.*
2. *$\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.*
3. *$\det A \in \mathbb{R}$.*
4. *$A(\mathcal{H}_n) = (\ker A)^{\perp}$.*

Důkaz.

1. Pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$ platí:
$$\langle A\vec{x} \,|\, \vec{x} \rangle = \langle \vec{x} \,|\, A^*\vec{x} \rangle = \langle \vec{x} \,|\, A\vec{x} \rangle = \overline{\langle A\vec{x} \,|\, \vec{x} \rangle}.$$
Tudíž $\langle A\vec{x} \,|\, \vec{x} \rangle \in \mathbb{R}$.
2. Nechť $\lambda \in \sigma(A)$ a $\vec{x}$ je vlastní vektor A příslušný λ. Pak máme:
$$\langle A\vec{x} \,|\, \vec{x} \rangle = \langle \lambda\vec{x} \,|\, \vec{x} \rangle = \lambda \|\vec{x}\|^2.$$
Podle předchozího bodu je $\lambda\|\vec{x}\|^2 \in \mathbb{R}$ a díky nenulovosti $\vec{x}$ musí platit, že $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. Z definice hermitovského operátoru a z důsledku 7.8 plyne, že $\det A = \det A^* = \overline{\det A}$. Proto $\det A$ musí být reálný. (Jiná možnost důkazu je uvědomit si, že $p_A^{-1}(0) = \sigma(A)$, proto je determinant operátoru součinem vlastních čísel.)
4. Ukažme, že $A(\mathcal{H}_n) \subset (\ker A)^{\perp}$. Pro libovolné $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$ a $\vec{y} \in \ker A$ plyne z hermitovskosti A, že $\langle A\vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} \,|\, A\vec{y} \rangle = \langle \vec{x} \,|\, \vec{0} \rangle = 0$.
Jelikož $\operatorname{codim} \ker A = h(A)$, dostáváme, že $A(\mathcal{H}_n) = (\ker A)^{\perp}$. □

Reálná poznámka 7.37. Nad tělesem $\mathbb{R}$ je jediným zajímavým tvrzením věty 7.36 čtvrtý bod, který zůstává v platnosti. Lze ale navíc ukázat, že pro symetrické operátory jsou kořeny charakteristického polynomu reálné. Kombinací s reálnou poznámkou 7.29 potom dostáváme, že každý symetrický operátor je diagonalizovatelný.

Úkol 7.38. * Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Pokud $A = -A^*$, pak A nazveme **antihermitovský** (nad $\mathbb{C}$), resp. **antisymetrický** (nad $\mathbb{R}$). Vyšetřete vlastnosti takových operátorů.

Úkol 7.39. ** Dokažte tvrzení této kapitoly přeformulovaná pro matice. Vyjmenujme, jaká tvrzení máte dokázat.

- Normální matice:

  1. Matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je normální, právě když $\|\mathbb{A}\vec{x}\| = \|\mathbb{A}^H\vec{x}\|$, kde $\|.\|$ značí normu v unitárním prostoru $\mathbb{C}^n$.
  2. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je normální matice. Potom $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ a $\vec{x}$ je vlastní vektor $\mathbb{A}$ příslušný λ, právě když $\overline{\lambda} \in \sigma(\mathbb{A}^H)$ a $\vec{x}$ je vlastní vektor $\mathbb{A}^H$ příslušný $\overline{\lambda}$.
  3. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je normální matice. Potom vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé (v unitárním prostoru $\mathbb{C}^n$).
  4. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je normální matice. Potom $\mathbb{A}$ je diagonalizovatelná.
  5. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Pak $\mathbb{A}$ je normální matice, právě když existuje ON báze unitárního prostoru $\mathbb{C}^n$ sestavená z vlastních vektorů $\mathbb{A}$.

     Tvrzení lze zformulovat ekvivalentně v následujícím tvaru (pro důkaz je dobré znát ekvivalentní charakterizace unitárních matic, tj. speciálně fakt, že unitární matice $\mathbb{U}$ splňuje $\mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U}^H$).

     Věta 7.40. *Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Pak $\mathbb{A}$ je normální matice, právě když existují diagonální matice $\mathbb{D}$ a unitární matice $\mathbb{U}$ takové, že $\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{D}\mathbb{U}^H$.*

- Unitární matice:

  1. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$, uvažujme unitární prostor $\mathbb{C}^n$. Potom $\mathbb{A}$ je unitární $\Leftrightarrow$ $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^H$ $\Leftrightarrow$ pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ platí, že $\langle \mathbb{A}\vec{x} \,|\, \mathbb{A}\vec{y} \rangle = \langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle$ $\Leftrightarrow$ pro každé $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ platí, že $\|\mathbb{A}\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$.
  2. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je unitární matice. Pak pro každé $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ je $|\lambda| = 1$. (Pro ortogonální matice nemusí platit rovnost $\lambda = \pm 1$, mohou mít i nereálná vlastní čísla, např. matice $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.)
  3. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je unitární matice. Potom $|\det \mathbb{A}| = 1$. (Pro OG matici platí rovnost $\det \mathbb{A} = \pm 1$.)

- Hermitovské matice:

  1. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je hermitovská matice. Potom pro každé $\vec{x}$ z unitárního prostoru $\mathbb{C}^n$ platí, že $\langle \mathbb{A}\vec{x} \,|\, \vec{x} \rangle \in \mathbb{R}$.
  2. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je hermitovská matice. Potom $\sigma(\mathbb{A}) \subset \mathbb{R}$.
  3. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je hermitovská matice. Pak $\det \mathbb{A} \in \mathbb{R}$. (Pro symetrické matice jde o nezajímavé tvrzení, protože všechny reálné matice mají reálný determinant.)
  4. Nechť $\mathbb{A}$ je symetrická matice řádu n. Potom existuje ON báze eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^n$ sestavená z vlastních vektorů $\mathbb{A}$.

S hermitovskými maticemi úzce souvisí kvadratické formy. Při praktickém počítání s kvadratickými formami se většinou pracuje právě s jejich maticemi. Převedeme proto pojmy odpovídající charakteru kvadratických forem do maticové řeči.

Definice 7.41. Nechť $\mathbb{A}$ je hermitovská matice z $\mathbb{C}^{n,n}$. Dále nechť Q je kvadratická forma na $\mathbb{C}^n$ definovaná vztahem ${}^{\mathcal{E}}Q = \mathbb{A}$. Řekneme, že $\mathbb{A}$ má **charakter** (zkráceně $\mathbb{A}$ je):

1. **pozitivně definitní** (PD), pokud Q je PD,
2. **pozitivně semidefinitní** (PSD), pokud Q je PSD,
3. **negativně definitní** (ND), pokud Q je ND,
4. **negativně semidefinitní** (NSD), pokud Q je NSD,
5. **indefinitní**, pokud Q je indefinitní.

Poznámka 7.42. Uvědomme si, že zápis ${}^{\mathcal{E}}Q = \mathbb{A}$ znamená pro každé $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$, že $Q(\vec{x}) = (\vec{x})^T \mathbb{A}\overline{(\vec{x})} = \langle \overline{\mathbb{A}}\vec{x} \,|\, \vec{x} \rangle$, přičemž skalární součin je standardní.

Úkol 7.43. Pro symetrické matice lze ověřování jejich charakteru zjednodušit. Stačí totiž uvažovat příslušnou kvadratickou formu jen na $\mathbb{R}^n$. Platí tedy, že $\mathbb{A}$ je PD, právě když $(\vec{x})^T \mathbb{A}\vec{x} > 0$ pro každý nenulový vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Analogicky pro PSD, ND, NSD a indefinitnost. Dokažte.

Úkol 7.44. Přeformulujte Sylvesterovo kritérium pro matice a dokažte.

Úkol 7.45. Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\mathbb{G}$ je Gramova matice vektorů $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ z $\mathcal{H}$, tj. čtvercová matice řádu n definovaná pro každé $i, j \in \hat{n}$ jako $\mathbb{G}_{ij} = \langle \vec{x}_i \,|\, \vec{x}_j \rangle$. Dokažte následující tvrzení:

(a) Jsou-li vektory $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ LZ, potom $\mathbb{G}$ je PSD.

(b) Jsou-li vektory $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ LN, potom $\mathbb{G}$ je PD.

7.4 Spektrální kritérium pro kvadratické formy

V kapitole Sylvesterovo kritérium jsme slíbili, že představíme ještě jedno kritérium, které umožní rozhodnout o charakteru kvadratické formy. Dokonce na rozdíl od Sylvesterova kritéria umí rozlišit i mezi pozitivní a negativní semidefinitností a indefinitností forem. Nyní již máme v ruce potřebný aparát k tomu, abychom takové kritérium mohli vyslovit a dokázat. Využijeme totiž znalostí o normálních maticích a jejich podtřídách.

Lemma 7.46. *Nechť Q je kvadratická forma na vektorovém prostoru V_n nad tělesem T a $\mathcal{X}$ je báze V_n. Pak ${}^{\mathcal{X}}Q$ má pouze reálná vlastní čísla. Označme je $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. (Hodnoty mohou opakovat – každé vlastní číslo je ve výčtu tolikrát, kolik je jeho algebraická násobnost.) Potom existuje polární báze $\mathcal{A}$ prostoru V_n taková, že platí:*

$$ {}^{\mathcal{A}}Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}. $$

Důkaz. Matice ${}^{\mathcal{X}}Q$ je podle věty 4.23 hermitovská pro $T = \mathbb{C}$ (resp. symetrická pro $T = \mathbb{R}$). Podle úkolu 7.39 má reálná vlastní čísla a existuje ON báze $\mathcal{U}$ unitárního prostoru $\mathbb{C}^n$ (resp. eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^n$) složená z vlastních vektorů ${}^{\mathcal{X}}Q$ (příslušných popořadě vlastním číslům $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$).

Označíme-li $\mathbb{U}$ matici, jejíž sloupce jsou vektory z báze $\mathcal{U}$, pak je $\mathbb{U}$ unitární matice (resp. ortogonální), tedy $\mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U}^H$. Proto platí:

$$ {}^{\mathcal{X}}Q = \mathbb{U} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \mathbb{U}^{H}. $$

Samozřejmě také máme:

$$ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} = \mathbb{U}^{H}\,{}^{\mathcal{X}}Q\mathbb{U}. \tag{7} $$

Podle čtvrtého bodu věty 4.23 platí pro libovolnou bázi $\mathcal{A}$:

$$ {}^{\mathcal{A}}Q = ({}^{\mathcal{A}}I^{\mathcal{X}})^T\,{}^{\mathcal{X}}Q\overline{({}^{\mathcal{A}}I^{\mathcal{X}})}. $$

Definujeme-li nyní bázi $\mathcal{A}$ rovností $\overline{({}^{\mathcal{A}}I^{\mathcal{X}})} = \mathbb{U}$, potom ze vztahu (7) plyne, že jsme nalezli bázi s vlastností:

$$ {}^{\mathcal{A}}Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}. $$

□

Pozorování 7.47. *Nechť Q je kvadratická forma v $\mathbb{R}^3$. Jelikož ${}^{\mathcal{E}}Q$ je symetrická matice, umíme najít ON bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ sestavenou z vlastních vektorů matice ${}^{\mathcal{E}}Q$. Z důkazu lemmatu 7.46 je vidět, že jde o polární bázi Q. Je zřejmé, že také libovolná OG báze $\mathbb{R}^3$ sestavená z vlastních vektorů matice ${}^{\mathcal{E}}Q$ bude polární bází $\mathcal{A}$, pouze pak ${}^{\mathcal{A}}Q$ nebude mít na diagonále nutně vlastní čísla.*

Příklad 7.48. Nechť Q je kvadratická forma v $\mathbb{R}^3$ a ${}^{\mathcal{E}}Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Charakteristický polynom je roven $p(t) = -t(t-1)(t-2)$, tudíž spektrum matice je rovno $\{0,1,2\}$. $\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je OG báze z vlastních vektorů příslušných popořadě vlastním číslům $0,1,2$. Podle předchozího pozorování jde tedy o polární bázi Q.

Věta 7.49 (Spektrální kritérium)**.** *Nechť Q je kvadratická forma na vektorovém prostoru V_n nad tělesem T a $\mathcal{X}$ je báze V_n. Potom signatura (p,q,r) formy Q splňuje:*

- *$p =$ počet kladných vlastních čísel ${}^{\mathcal{X}}Q$ (včetně algebraických násobností),*
- *$q =$ počet záporných vlastních čísel ${}^{\mathcal{X}}Q$ (včetně algebraických násobností),*
- *$r =$ algebraická násobnost nuly jakožto vlastního čísla ${}^{\mathcal{X}}Q$.*

Důkaz. Tvrzení je důsledkem lemmatu 7.46 a faktu, že signatura nezávisí na volbě polární báze. □

Spektrální kritérium můžeme vyslovit také v následujícím tvaru.

Důsledek 7.50. *Nechť Q je kvadratická forma na vektorovém prostoru V_n nad tělesem T a $\mathcal{X}$ je báze V_n. Pak platí:*

1. *Q je PD, právě když ${}^{\mathcal{X}}Q$ má pouze kladná vlastní čísla.*
2. *Q je PSD, právě když ${}^{\mathcal{X}}Q$ má vlastní číslo nula a nemá záporná vlastní čísla.*
3. *Q je ND, právě když ${}^{\mathcal{X}}Q$ má pouze záporná vlastní čísla.*
4. *Q je NSD, právě když ${}^{\mathcal{X}}Q$ má vlastní číslo nula a nemá kladná vlastní čísla.*
5. *Q je indefinitní, právě když ${}^{\mathcal{X}}Q$ má alespoň jedno kladné a alespoň jedno záporné vlastní číslo.*

Příklad 7.51. Vyšetřete charakter kvadratické formy Q na $\mathbb{R}^3$, která má ve standardní bázi tvar:

$$Q(\vec{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2.$$

Řešení: Stačí určit vlastní čísla ${}^{\mathcal{E}}Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Charakteristický polynom je roven:

$$p(t) = -(t-1)\left(t-\sqrt{3}\right)\left(t+\sqrt{3}\right),$$

proto $\sigma({}^{\mathcal{E}}Q) = \{-\sqrt{3}, 1, \sqrt{3}\}$. Tudíž podle spektrálního kritéria je Q indefinitní.

Úkol 7.52. Přeformulujte spektrální kritérium pro matice a dokažte.